TD2

Fonctions de la variable réelle

Exercice 5.

Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$. Démontrer que :

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$

Indication : On pourra introduire la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ *et étudier ses variations sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Solution.

On introduit la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$. Comme a, b sont strictement positifs, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{\frac{a}{1+ax}\ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx}\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)^2} = \frac{g(x)}{(1+ax)(1+bx)\ln(1+bx)^2},$$

avec $g(x) = a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$.
On a $g(0) = 0$, et pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = ab\ln(1+bx) + ab - ba\ln(1+ax) - ba = ab\ln\left(\frac{1+bx}{1+ax}\right) \geq 0.$$

Donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, g est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit donc que f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Puisque $0 < a \leq b$, on a $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$. En appliquant f, on obtient $f(1/b) \leq f(1/a)$, c'est à dire :

$$\frac{\ln(1+a\times 1/b)}{\ln(1+b\times 1/b)} \leq \frac{\ln(1+a\times 1/a)}{\ln(1+b\times 1/a)}.$$

D'où finalement :

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$