TD17

Espaces vectoriels

Espaces vectoriels - Généralités

Exercice 1

Les ensembles E suivants, munis de leurs opérations usuelles, sont ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0 \text{ et } x-3y=0\}$;

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+3y+z=0\}$;

c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ xy \geq 0\}$;

d) $\{(x,x+y,x+y+z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$;

e) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ monotone }\}$;

f) $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ bornée }\}$;

g) $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$;

h) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a+d=0\right\}$.

Exercice 2

On définit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x+y-z=0\} \quad ; \quad F = \{(x,x,-x) \in \mathbb{R}^3,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $E \cap F$.

b) On pose $u = (1,-1,1)$ et $v = (3,1,7)$. Montrer que $Vect(u,v) \subset E$. A-t-on égalité?

Exercice 3

Écrire les espaces vectoriels suivants sous la forme d'un $Vect$:

a) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ;\ x = 3y = 2x+2t\}$;

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x+2y = 2x+z\}$;

c) $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ géométrique de raison } 2\}$;

d) $\{P \in \mathbb{R}_3[X] ;\ P(1) = P(2) = 0\}$.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = Vect((2,3,-1),(1,-1,-2))$ et $G = Vect((3,7,0),(5,0,-7))$. Montrer que $F = G$.

Exercice 5

Dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose :

$$f_k(x) = \cos(kx) \quad ; \quad g_k(x) = \cos^k(x).$$

a) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe un polynôme T_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = T_n(\cos(x)).$$

Montrer qu'on a la relation $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.

b) Expliciter T_0, T_1, T_2, T_3, et préciser le degré et le coefficient dominant de T_n.

c) En déduire l'égalité des sous-espaces $Vect(f_0, f_1, \ldots, f_n) = Vect(g_0, g_1, \ldots, g_n)$.

Exercice 6

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E un $\mathbb{K}$-e.v.. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Espaces vectoriels supplémentaires

Exercice 7

On pose:

$$F = \{(x, 2x, 3x),\ x \in \mathbb{R}\} \text{ et } G = \{(x+y, x+y, y),\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 8

Soit $E = \mathbb{R}^4$. On pose $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,1,0,0)$, $u_3 = (1,1,1,0)$, $u_4 = (1,1,1,1)$, et $F = Vect(u_1, u_2)$, $G = Vect(u_3, u_4)$.

a) Montrer que $F = \{(x,y,z,t) \in E,\ z = t = 0\}$ et $G = \{(x,y,z,t) \in E,\ x - y = 0 \text{ et } x + y - 2z = 0\}$.

b) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 9

Dans $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$,, on pose :

$$F = \{f \in E,\ \int_0^1 f = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0\} \quad ; \quad G = \{x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2,\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 10

Montrer, dans chacun des cas suivants, que F et G sont deux-sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

a) $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X]\ ;\ P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$.

b) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $G = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

c) $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente$\}$, $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite nulle$\}$ et $G = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constante$\}$.

Exercice 11

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et soient p réels $(a_i)_{i\in[|1,p|]}$ deux à deux distincts dans $[0,1]$. On pose:

$$F = \{f \in E,\ \forall i \in [|1,p|],\ f(a_i) = 0\}.$$

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b) Déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 12

On considère trois sous-espaces vectoriels F, G, H d'un espace vectoriel E.

a) Comparer les sous-espaces $(F+G) \cap H$ et $(F \cap H) + (G \cap H)$.

b) Montrer que ces espaces sont égaux si $F \subset H$.

Exercice 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient A et B des sous-espaces vectoriels de E, soit C un supplémentaire de $A \cap B$ dans B, c'est-à-dire tel que $(A \cap B) \oplus C = B$.
Montrer que A et C sont supplémentaires dans $A + B$.

---

2 Familles finies de vecteurs

Exercice 14

Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées?

a) $((1,1,0),(0,1,1))$;

b) $((1,-1,0),(0,1,-1),(1,0,-1))$;

c) $((1,1,0),(1,0,1),(2,1,2))$;

d) $((1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,1))$.

Exercice 15

Les familles suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont-elles libres ou liées ?

a) $f_1 : x \mapsto \cos^2 x,\ f_2 : x \mapsto \cos x,\ f_3 : x \mapsto 1$;

b) $f_1 : x \mapsto |x|,\ f_2 : x \mapsto |x-1|,\ f_3 : x \mapsto |x+1|$;

c) $(x \mapsto \sin x, \dots, x \mapsto \sin(2^n x))$;

d) $f_i : x \mapsto e^{\lambda_i x}$, où $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.

Exercice 16

Les familles suivantes de $\mathbb{R}[X]$ sont-elles libres ou liées ?

a) $(3, X^2+1, X^5-3X^2+2)$;

b) $(T_0,\dots,T_n)$ où T_i : i-ème polynôme de Tchebytchev ;

c) $(X^k(X-1)^{n-k})_{k[|0,n|]}$;

d) $(L_0,\dots,L_n)$ où L_i : i-ème polynôme de Lagrange associé à $a_0 < \cdots < a_n$.

Exercice 17

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $a,b,c \in E$. On pose :

$$u = b+c,\ v = c+a,\ w = a+b.$$

Montrer que :

$$(a,b,c) \text{ est libre} \Leftrightarrow (u,v,w) \text{ est libre.}$$

Exercice 18

a) Montrer que $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x-y+z=0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en donner une base.

b) Même question avec $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 2y-3z\}$.

Exercice 19

Soient $a,b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$. On pose:

$$E = \{P \in \mathbb{C}_4[X],\ P(a)=0, P(b)=0\}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_4[X]$ et déterminer une base de E.

Exercice 20

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in[|1,p|]}$ et $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in[|1,p|]}$ deux familles libres de vecteurs de E. On suppose que, pour tout $i \in [|1,p|]$, $f_i \in F_i$ où $F_i = Vect(e_1,\dots,e_i)$.

a) Montrer que:

$$\forall i \in [|1,p|],\ e_i \in E_i \text{ où } E_i = Vect(f_1,\dots,f_i).$$

b) Montrer que si $\mathcal{E}$ est une base de E alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
