TD16

# Polynômes

## Ensemble $\mathbb{K}[X]$

### Exercice 1 (Valuation)

On définit l'application valuation sur $\mathbb{K}[X]$ par

$$\mathrm{Val}(P) = \begin{cases} +\infty & \text{si } P = 0, \\ \sup\{n \in \mathbb{N} | a_k = 0, \forall k < n\} & \text{si } P \neq 0. \end{cases}$$

Montrer que :

a) si $P \neq 0$, $\mathrm{Val}(P) \leq \deg(P)$,

b) $\mathrm{Val}(P+Q) \geq \min\{\mathrm{Val}(P), \mathrm{Val}(Q)\}$,

c) $\mathrm{Val}(PQ) = \mathrm{Val}(P) + \mathrm{Val}(Q)$.

d) $\mathrm{Val}(\lambda \cdot P) = \mathrm{Val}(P)$ pour tout $\lambda \neq 0$.

---

### Exercice 2

a) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tels que $P(X+1) - P(X-1) = X^2 + 1$.

b) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'(X)^2 = 4P(X)$.

c) Déterminer tous les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation : $(X^2+1)P'' - 6P(X) = 0$.

---

## Divisibilité

### Exercice 3

Effectuer la division de $A \in \mathbb{C}[X]$ par $B \in \mathbb{C}[X]$ dans les cas suivants :

a) $A(X) = X^3 - 1, \quad B(X) = X + 2;$

b) $A(X) = X^4 + iX^3 - iX^2 + X + 1, \quad B(X) = X^2 + iX + 1;$

c) $A(X) = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2, \quad B(X) = X^2 + (1-i)X + 1 + i.$

---

### Exercice 4

Déterminer le reste de la division de :

$$A(X) = (\cos a + X \sin a)^n \quad \text{par} \quad B(X) = X^2 + 1.$$

---

### Exercice 5

Soit $P$ un polynôme à coefficients réels.

a) En notant $R$ le reste de la division euclidienne de $P$ par $X^2+1$, montrer que $R(i) = P(i)$. En déduire que $X^2+1$ divise $P$ si et seulement si $P(i) = 0$.

b) Montrer ce même résultat sans passer par le reste de la division enclidienne.

---

### Exercice 6
Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P - X$ divise $P \circ P - X$. En déduire les solutions $x \in \mathbb{R}$ de :

$$(x^2 - 3x + 1)^2 = 3x^2 - 8x + 2.$$

---

### Exercice 7
Déterminer tous les polynômes $P$ tels que :

$$P(2) = 6,\ P'(2) = 1,\ P''(2) = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 3,\ P^{(n)}(2) = 0.$$

---

## Racines

### Exercice 8
Montrer que $X(X+1)(2X+1)$ divise $A(X) = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$.

---

### Exercice 9
Déterminer $a$ et $b$ pour que $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$ admette la racine double $X = 1$. Quel est alors le quotient de $P(X)$ par $(X-1)^2$ ?

---

### Exercice 10
Soit $n$ un entier tel que $n \geq 2$. Soit le polynôme $P(X) = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} ... + \dfrac{X^n}{n!}$.

a) Calculer $P(X) - P'(X)$.

b) Montrer que toutes les racines complexes de $P$ sont simples.

---

### Exercice 11
Montrer que les seuls polynômes périodiques $P \in \mathbb{C}[X]$ (i.e. tels que il existe $k \in \mathbb{C}^*$ tel que $P(X+k) = P(X)$ sont les polynômes constants.

---

### Exercice 12
Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré non nul. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier.

a) Si $P$ est de degré impair, alors $P$ admet une racine réelle.

b) Si $P$ admet une racine réelle, alors $P'$ admet une racine réelle.

c) Si $P$ admet deux racines réelles, alors $P'$ admet une racine réelle.

d) Si $P'$ est scindé à racines simples, alors $P$ est scindé à racines simples.

e) Si $P$ est scindé à racines simples, alors $P'$ est scindé à racines simples.

f) Si $a \in \mathbb{R}$ est racine de $P$ de multiplicité exactement $m \geq 1$, alors $a$ est racine de $P'$ de multiplicité exactement $m - 1$.

---

### Exercice 13
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $L_n(X) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dX^n}((X^2-1)^n)$.

a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de $L_n$.

b) Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.

c) Montrer que $L_n$ admet $n$ racines réelles distinctes appartenant à $]-1,1[$.

---

**Exercice 14**
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si $P$ est scindé, alors $P'$ est scindé.

---

## Factorisation

**Exercice 15**
a) Factoriser $A(X) = X^5 + X$ dans $\mathbb{C}[X]$.

b) Trouver la décomposition de $A(X) = X^6 + 1$ en produit de polynômes irréductibles et unitaires de $\mathbb{R}[X]$.

---

**Exercice 16**
Soit le polynôme $P(X) = X^4 + (-4+2i)X^3 + (12-8i)X^2 + (4+26i)X - 13$.

a) Montrer que $-i$ est une racine de $P$. Préciser son ordre de multiplicité.

b) Calculer les racines de $P$.

---

**Exercice 17**
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^{2n} - 2\cos(\phi)X^n + 1$ où $\phi \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

---

**Exercice 18**
Quels sont les polynômes $P$ de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P'$ divise $P$ ?

---

**Exercice 19 (d'après Centrale-Supélec)**
Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation

$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

a) Montrer que si $P$ est un polynôme non nul vérifiant cette relation, alors l'ensemble de ses racines est contenu dans $\{0, -1, j, j^2\}$.

b) En déduire l'ensemble des solutions de cette équation.

---

**Exercice 20**
Soit $n$ un entier strictement positif. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n.$$

En déduire $\prod_{k=1}^{p} cotan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

---

**Exercice 21**
On considère le polynôme $P = (X+1)^n - e^{2in\theta} \in \mathbb{C}[X]$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer ses racines et sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

b) En déduire la valeur des produits $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

---

**Exercice 22**
Résoudre le système $(S)$ $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+4xy+3y & = & -5 \\ x-2xy+y & = & 5 \end{array}\right.$

---

**Exercice 23**
Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$, $n = \deg(P)$. Montrer que les sommes des zéros de $P, P', P'', \cdots, P^{(n-1)}$ forment une progression arithmétique.

---

## Quelques classiques

**Exercice 24 (Polynômes d'interpolation de Lagranges)**
Etant donné (n+1) complexes distincts $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ et (n+1) complexes $(b_0, b_1, \cdots, b_n)$, on cherche un polynôme $P$ de degré minimal tel que

$$\forall i \in [|0,n|], P(a_i) = b_i.$$

**Proposition :** Un tel polynôme existe. Il est de plus unique si l'on suppose que $\deg(P) \leq n$.

1. On définit $L_i = \prod_{k \neq i} \frac{X-a_k}{a_i-a_k}$. Montrer que $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ pour tout $i$, et calculer $L_i(a_j)$.
   En déduire l'existence du polynôme $P$ de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $\forall i \in [|0,n|], P(a_i) = b_i$.

2. Démontrer l'unicité d'un tel polynôme. Y a-t-il toujours unicité si on ne suppose pas $\deg(P) \leq n$ ?

---

**Exercice 25 (Polynômes de Tchebytchev)**
On étudie pour tout $n \in \mathbb{N}$ les polynômes $T_n \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

a) Montrer que si $T_n$ existe, alors il est unique.

b) Vérifier que $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = 2X^2 - 1$.

c) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n$ existe et vérifie la relation $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.

d) Déterminer la parité de $T_n$, son degré ainsi que son coefficient dominant.

e) Déterminer l'ensemble des racines de $T_n$, et en déduire sa décomposition en produits d'irréductibles.

f) En déduire que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \text{ si } n \text{ est pair, 0 sinon.}$$

g) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$(x^2-1)T_n''(x) + xT_n'(x) = n^2 T_n(x).$$

---