TD15

Analyse asymptotique

Relations de comparaison : cas des suites

Exercice 1

Trouver une suite simple équivalente à la suite:

a) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,

b) $x_n = \ln(n+1) - \ln(n)$,

c) $x_n = n^{1/n} - 1$.

d) $x_n = n(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{5})$

e) $x_n = \dfrac{\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2 - 1}$

f) $x_n = (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$

g) $x_n = \dfrac{\exp\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right) - e}{\exp\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(n + 1 + \frac{1}{n}\right)}$

Exercice 2

Utiliser des équivalents pour calculer les limites:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n-x}\right)^n$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^n$.

Relations de comparaison : cas des fonctions

Exercice 3

Déterminer un équivalent simple de f au voisinage de 0 ($a > 0, b > 0$):

a) $f(x) = \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$,

b) $f(x) = \ln(\cos x)$,

c) $f(x) = \ln(\sin x)$,

d) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

e) $f(x) = a^x - b^x$ $(a \neq b)$

f) $f(x) = \sqrt[4]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-x^2}$,

Exercice 4

Calculer les limites suivantes en se servant d'équivalents:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \ln x \ln(1 + \ln(1+x))$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \tan x)^{1/\sin x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln x}{x^x - 1}$,

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln((\sin x)^2)}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$.

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x \tan 2x$,

f) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x$,

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x+1}\ln\left(1 - \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$,

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.

Exercice 5

Déterminer les limites en 0^+ des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x^x \quad ; \quad g : x \mapsto x^{f(x)} \quad ; \quad h : x \mapsto x^{g(x)}.$$

Développements limités

Exercice 6

Calculer le développement limité des fonctions suivantes:

a) $f : x \mapsto \cos x$ à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$,

b) $f : x \mapsto \ln x$ à l'ordre 4 au voisinage de e,

c) $f : x \mapsto e^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 1,

Exercice 7

Calculer le développement limité des fonctions suivantes:

a) $f : x \mapsto e^x \arctan x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,

b) $f : x \mapsto \dfrac{(\sin x)^2}{x^2}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,

c) $f : x \mapsto \dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 8

Calculer le développement limité des fonctions suivantes:

a) $f : x \mapsto (\cos x)^3$ à l'ordre 6 au voisinage de 0.

b) $f : x \mapsto e^{\cos x}(1 + e^{-1/x^2})$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.

c) $f : x \mapsto \ln(1 + \cos x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 9

Calculer le développement limité des fonctions suivantes:

a) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\cos x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

b) $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 10

On se propose de déterminer le développement limité de la fonction tangente de plusieurs manières.

a) Justifier l'existence de DL en 0 à tout ordre pour la fonction tangente. Que dire des coefficients des DL ?

b) Utiliser la formule de Taylor-Young pour obtenir un DL à l'ordre 3.

c) Utiliser la formule $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour obtenir un DL à l'ordre 5.

d) Utiliser la formule $\tan(\arctan(x)) = x$ pour obtenir un DL à l'ordre 7.

e) Utiliser une équation différentielle pour obtenir de proche en proche un DL à l'ordre 9.

Exercice 11

a) Donner un développement limité en 0 à l'ordre $n+2$ de $(1-e^x)^n$ de deux manières différentes.

b) En déduire, pour $n \in [|0, n+2|]$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} k^p$.

Exercice 12

Calculer le $DL_2(0)$ de $f : x \mapsto (1+\arctan x)^{\frac{x}{(\sin x)^2}}$.

Exercice 13

Calculer le développement limité de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = 2\tan(x) - x$.

a) Montrer que f admet une bijection réciproque impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b) Donner le développement limité de f^{-1} à l'ordre 6 en 0.

Applications des développements limités

Exercice 15

Déterminer les dérivées n-ièmes en 0 de $x \mapsto \arcsin(x)$.

Exercice 16

Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/(\sin x)^2}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\left(\ln \frac{x+1}{x-1}\right)^2}$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(e - \left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x^x - a^x}$

Exercice 17

Soit $f :]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\setminus\{0\}, x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$. Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 18

Etudier f au voisinage de x_0 (tangente et position relative de la courbe par rapport à sa tangente) pour les fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = \ln(x^2+2x+2)$ en $x_0 = 0$

b) $f_2(x) = \dfrac{1}{x}(e^{\sin x} - 1)$ en $x_0 = 0$

c) $f_3(x) = \sqrt{\tan x}$ en $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 19
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

a) Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
En déduire la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ en 0 et leurs positions relatives.

b) Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} x + 1 + \dfrac{3}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. En déduire la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Exercice 20
Étudier les branches infinies de $f : x \mapsto \frac{x^2}{x-1} e^{1/x}$.

Exercice 21
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ que l'on notera x_n. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n \geq 0}$.

b) (i) Montrer que $x_n \sim n\pi$.
(ii) Montrer que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$.

c) Chercher un équivalent de $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$.

d) Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 22
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution que l'on notera x_n.

b) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire la limite de (x_n).

c) Montrer que $x_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

d) Montrer que $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.
