TD13

Limites et continuité

Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que :

- il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to+\infty} e^{ax}f(x) = 0$;
- il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto e^{bx}f(x)$ ne tende pas vers 0 quand $x \to +\infty$.

a) Justifier l'existence de $\lambda = \sup\{c \in \mathbb{R} | \lim_{x\to+\infty} e^{cx}f(x) = 0\}$.

b) Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{x\to+\infty} e^{(\lambda-\varepsilon)x}f(x) = 0$.

c) Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $x \mapsto e^{(\lambda+\varepsilon)x}f(x)$ n'est bornée sur aucun voisinage de $+\infty$.

Solution.

a) Notons $A = \{c \in \mathbb{R} | \lim_{x\to+\infty} e^{cx}f(x) = 0\}$. A est une partie non-vide de $\mathbb{R}$ car $a \in A$ par hypothèse. Montrons que A est majorée par b :

- b n'appartient pas à A par hypothèse.
- pour tout $c > b$, posons $g(x) = e^{cx}f(x)$ et $h(x) = e^{bx}f(x)$. On a $g(x) = e^{(c-b)x}h(x)$. On va montrer que g ne tend pas vers 0 en $+\infty$. Par l'absurde supposons que $g(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. Alors on aurait :

  $$h(x) = e^{(b-c)x}g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{en notant que } e^{(b-c)x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ (b-c<0).$$

  C'est absurde par hypothèse sur b. Donc g ne tend pas vers 0 en $+\infty$, et c n'appartient pas à A.

On a donc montré que pour tout $c \geq b$, $c \notin A$. Donc A est bien majorée par b. La partie A admet bien une borne supérieure qu'on notera λ.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$, le réel $\lambda - \varepsilon$ n'est plus un majorant de A. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe donc $c \in A$ tel que $\lambda - \varepsilon < c$. Dès lors, on a :

$$e^{(\lambda-\varepsilon)x}f(x) = e^{(\lambda-\varepsilon-c)x}\left(e^{cx}f(x)\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, $\lambda - \varepsilon - c < 0$ donc on a $e^{(\lambda-\varepsilon-c)x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, puisque $c \in A$, on a par définition de A que $e^{cx}f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par opération sur les limites, on a bien le résultat souhaité.

c) Par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction $x \mapsto e^{(\lambda+\varepsilon)x}f(x)$ est bornée sur un voisinage de $+\infty$. Alors on aurait :

$$e^{(\lambda+\frac{\varepsilon}{2})x}f(x) = e^{(-\frac{\varepsilon}{2})x}\left(e^{(\lambda+\varepsilon)x}f(x)\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, on a $e^{(-\frac{\varepsilon}{2})x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. et par hypothèse $x \mapsto e^{(\lambda+\varepsilon)x}f(x)$ est bornée au voisinage de $+\infty$.

Ainsi, $\lambda + \frac{\varepsilon}{2}$ appartiendrait à A. Il serait donc inférieure à la borne supérieure de A qui est λ. On aurait ainsi $\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \leq \lambda$, soit encore $\frac{\varepsilon}{2} \leq 0$ ce qui est contradictoire avec $\varepsilon > 0$.

Ainsi l'hypothèse de départ était fausse, et on obtient le résultat voulu.

Exercice 23 Déterminer toutes les fonctions continues sur l'intervalle considéré vérifiant les équations fonctionnelles suivantes :

d) $\forall x \in [0,1]$, $f(x^2) \leq f(x)$ et $f(0) = f(1)$ (*utiliser les suites* $(x^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(x^{2^{-n}})_{n\in\mathbb{N}}$) ;

Solution.
Par hypothèse, f est continue sur le segment $[0,1]$. Elle est donc bornée sur $[0,1]$ et elle atteint ses bornes. Il existe donc $c, d \in [0,1]$ tels que :

$$\forall x \in [0,1], f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

On exploite à présent les autres hypothèses sur la fonction f.

On a $f(c^2) \leq f(c)$. Or $f(c)$ est le minimum de la fonction f sur $[0,1]$. Donc $f(c) = f(c^2)$.

Montrons par récurrence que $f(c) = f(c^{2^n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- La propriété est vraie au rang 1 d'après ce que nous venons de faire.
- Supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $f(c) = f(c^{2^n})$. On a :

  $$f(c^{2^{n+1}}) = f((c^{2^n})^2) \leq f(c^{2^n}) \text{ par hypothèse sur } f.$$

  Or par hypothèse de récurrence $f(c^{2^n}) = f(c)$, donc on obtient que $f(c^{2^{n+1}}) \leq f(c)$. Comme $f(c)$ est le minimum de la fonction f sur $[0,1]$, on a que $f(c) = f(c^{2^{n+1}})$. D'où la propriété au rang $n+1$.

On conclut par principe de récurrence.

On a donc $f(c) = f(c^{2^n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Deux cas sont alors possibles :

- si $c = 1$: alors le minimum absolu est atteint en $f(1) = f(0)$;
- si $c < 1$: alors puisque f est continue, on obtient par passage à la limite dans $f(c) = f(c^{2^n})$ que $f(c) = f(0) = f(1)$. On montre ainsi dans ce cas aussi que le minimum absolu est atteint en $f(0) = f(1)$.

On montre maintenant de même pour d les propriétés suivantes (à vous de le vérifier, c'est la même chose que précédemment pour c) :

- $f(d) = f(\sqrt{d}) = f(d^{1/2})$;
- par récurrence, $f(d) = f(d^{\frac{1}{2^n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;
- par passage à la limite (en dissociant les cas $d = 0$ et $d > 0$), $f(d) = f(0) = f(1)$.

Finalement, on a montré que $\forall x \in [0,1]$, $f(0) \leq f(x) \leq f(0)$, c'est à dire que f est constante sur $[0,1]$. Réciproquement, les fonctions constantes vérifient bien ces propriétés. Donc l'ensemble des fonctions recherché est l'ensemble des fonctions constantes.

Remarque. L'énoncé que je vous avais donné était faux : si on remplace $[0,1]$ par $[-1,1]$, on ne peut pas conclure que f est constante (prendre par exemple la fonction $f(x) = -x$ sur $[-1,0]$ et 0 sur $[0,1]$, elle vérifie toutes les hypothèses de l'énoncé mais n'est pas constante).

Rappel sur les fonctions puissances. J'ai vu beaucoup d'erreurs sur les fonctions puissances. Prenez cinq minutes pour relire les points suivants :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction p_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$p_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

On redonne quelques propriétés des fonctions puissances.

- p_α est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} = \alpha e^{(\alpha-1)\ln(x)}.$$

- p_α est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa monotonie dépend du signe de α.

- Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$.
  Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$.

- Si $\alpha > 0$, la fonction p_α peut être prolongée par continuité en 0 en posant $p_\alpha(0) = 0$.

- On a $\lim\limits_{x\to 0} p'_\alpha(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 1 \\ +\infty \text{ si } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$. Par le théorème de passage à la limite sur la dérive, on en déduit que :

  - si $0 < \alpha < 1$, p_α n'est pas dérivable en 0, et sa courbe représentative admet une tangente verticale en 0 ;
  - si $\alpha > 1$, p_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ en posant $p'_\alpha(0) = 0$.

On redonne enfin les règles de calcul sur les fonctions puissances (j'ai vu beaucoup d'erreurs sur la deuxième égalité !) : pour tout $x, y > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$(1)\ \ x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \quad (2)\ \ (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \quad (3)\ \ (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad (4)\ \ \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$$