PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 8 du Lundi 9 Novembre 2015

Nom et prénom :

1. (**/ 1 point**) Donner le domaine de définition de tangente et tracer sa courbe représentative.
On a $\mathcal{D}_{tan} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$. On se reportera au cours pour la courbe représentative de la fonction tangente.

2. (**/ 1 point**) Compléter :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

3. (**/ 1 point**) Que peut-on dire d'une solution de $y' + a(x)y = 0$ qui s'annule en un point ? Justifier.

Si f est une solution telle que $f(t_0) = 0$, alors f est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} (E) \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$.
Or la fonction constante égale à 0 est solution de ce problème. Par unicité, f est donc la fonction nulle.

4. (**/ 1 points**) Résoudre $y'' = y$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, homogène. Son équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$, soit $r = \pm 1$. L'ensemble des solutions de l'équation est donc :

$$\left\{t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t} / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

5. (**/ 1 points**) Dire sous quelle forme on cherche une solution de $y'' = y + xe^x$.

$\lambda = 1$ est solution de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme

$$f(x) = (ax+b)xe^x \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}$$

6. (**/ 2 points**) Résoudre $y'' + 4y' + 5y = 0$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, homogène. Son équation caractéristique est $r^2 + 4r + 5 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = -4$. Il y a donc deux racines complexes distinctes qui sont $r = -2 \pm i$.
L'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation est donc :

$$\left\{t \mapsto e^{-2t}(\lambda\cos(t) + \mu\sin(t) / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

L'ensemble des solutions à valeurs complexe de l'équation est :

$$\left\{t \mapsto \lambda e^{(-2-i)t} + \mu e^{(-2+i)t} / \lambda, \mu \in \mathbb{C}\right\}$$

7. (/ **1 points**) Dire sous quelle forme on cherche une solution de $y'' + 4y' + 5y = x^2 e^{2x}$.

$\lambda = 2$ n'est pas solution de l'équation caractéristique. On cherche une solution particulière sous la forme

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x} \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R}$$

8. (/ **1 points**) Résoudre $y'' - 2y' + y = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, homogène. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$. $r = 1$ est donc racine double de l'équation.
L'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation est donc :

$$\left\{t \mapsto (\lambda + \mu t)e^t / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

9. (/ **1 points**) Dire sous quelle forme on cherche une solution de $y'' - 2y' + y = xe^x$.

$\lambda = 1$ est racine double de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme

$$f(x) = (ax + b)x^2 e^x \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}$$