PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 5 du Lundi 5 Octobre 2015

Nom et prénom :

1. (**/ 1,5 points**) Exprimer en fonction de $t = \tan(x/2)$:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

2. (**/ 2 points**) Compléter :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad (n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{C})$$

3. (**/ 1,5 points**) Donner trois caractérisations des nombres réels :

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = 0[\pi])$

4. (**/ 1 points**) Formules d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (x \in \mathbb{R})$$

5. (**/ 1 points**) Formule de Moivre :

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx) \text{ pour tous } n \in \mathbb{Z} \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

6. (**/ 2 points**) Compléter et démontrer : $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$\cos(p) - \cos(q) = \mathrm{Re}(e^{ip} - e^{iq}) = \mathrm{Re}(e^{i\frac{p+q}{2}}(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{i\frac{q-p}{2}})) = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{p+q}{2}} 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\right)$$
$$= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

7. (**/ 1 points**) Linéariser $sin^3(x)$:

$$sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix-e^{-ix}}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{8i}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$$