Interrogation de cours 30 du Lundi 13 Juin 2016

Nom et prénom :

1. (**/ 1 points**) Donner la formule des probabilités composées.

Soit $n \geq 2$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

2. (**/ 1,5 points**) Rappeler la définition d'un système complet d'évènements, puis donner la formule des probabilités totales.

On appelle système complets d'événements de Ω toute famille $(A_1, \ldots, A_n)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) d'événements telle que :

- pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $[|1, n|]$, on ait $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ tel que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)$$

3. (**/ 1 points**) Donner la formule de Bayes (en utilisant un système complet d'évènements).

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ tel que pour tout $i \in [|1, n|]$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a pour tout $i \in [|1, n|]$:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}.$$

4. (**/ 1 points**) Donner la définition de :

- A et B indépendants : Deux événements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sont indépendants si :
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$
- $A_1, \ldots, A_n$ mutuellement indépendants : $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si pour tout sous-ensemble I de $[|1, n|]$, on a :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

5. (**/ 1 points**) Donner en détail la définition d'un produit scalaire :

C'est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est à dire une application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ satisfaisant :

- ϕ est bilinéaire :

$$\forall\, x, x', y, y' \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \phi(\lambda.x+x', y) = \lambda.\phi(x, y)+\phi(x', y) \text{ et } \phi(x, \lambda.y+y') = \lambda.\phi(x, y)+\phi(x, y')$$

- ϕ est symétrique :
$$\forall\, x, y \in E,\ \phi(y, x) = \phi(x, y)$$
- ϕ est positive :
$$\forall\, x \in E,\ \phi(x, x) \geq 0$$
- ϕ est définie :
$$\forall\, x \in E,\ \phi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

6. (**/ 2 points**) Compléter :
- $||x + y||^2 = ||x||^2 + 2 < x, y > + ||y||^2$
- $||x - y||^2 = ||x||^2 - 2 < x, y > + ||y||^2$
- Pythagore pour k vecteurs : soient $(x_1, \ldots, x_k)$ une famille de vecteurs orthogonaux, alors :
$$||x_1 + \cdots + x_k||^2 \leq ||x_1||^2 + \cdots + ||x_k||^2.$$

7. (**/ 3 points**) Rappeler, puis démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (on précisera sous quelle condition il y a égalité sans le démontrer) :

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien réel. On a :
$$\forall\, x, y \in E, \quad | < x, y > | \leq ||x||.||y||.$$
De plus, on a l'égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Fixons $x, y \in E$, et considérons la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :
$$f(t) = ||tx - y||^2 = t^2||x||^2 - 2t < x, y > + ||y||^2.$$
Deux cas peuvent alors se présenter :
- Si $||x||^2 = < x, x > = 0$, alors puisque le produit scalaire est défini on en déduit que $x = 0_E$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit alors $0 \leq 0$ et est bien satisfaite.
- si $||x||^2 \neq 0$, la fonction f est une fonction polynomiale du second degré en t, à valeurs positives car le produit scalaire est positif. Son discriminant est donc positif :
$$\Delta = 4\left((< x, y >^2 - ||x||^2||y||^2\right) \leq 0.$$
On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

8. (**/ 2 points**) Compléter l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :
Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre de vecteurs de E.
- poser $e_1 = \dfrac{x_1}{||x_1||}$;
- une fois les vecteurs $e_1, \ldots, e_k$ construits,
  - poser $v_{k+1} = x_{k+1} - < e_1, x_{k+1} > e_1 - \cdots - < e_k, x_{k+1} > e_k$;
  - poser $e_{k+1} = \dfrac{v_{k+1}}{||v_{k+1}||}$.

9. (**/ 2 points**) Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soient $x, y \in E$ des vecteurs de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$. Compléter :
- $< x, e_k > = x_k$
- $< x, y > = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$
- $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
- $x = < x, e_1 > e_1 + \cdots + < x, e_n > e_n$

10. (**/ 1 points**) Expression de le projection orthogonale sur F : Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormale de F, alors :
$$p_F(x) = < x, e_1 > e_1 + \cdots + < x, e_p > e_p.$$

11. (**/ 1,5 points**) Compléter : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E
$$E = F \oplus F^{\perp} \quad ; \quad d(x, F) = ||x - p_F(x)||.$$