PCSI 5 **Note /5**

Interrogation de cours 29 du Lundi 6 Juin 2016

Nom et prénom :

1. (**/ 1 points**) Donner la définition d'une probabilité $\mathbb{P}$.

Soit Ω un univers fini. On appelle probabilité sur Ω une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- pour tous événements incompatibles A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

2. (**/ 1 points**) Donner la formule des probabilités composées.

Soit $n \geq 2$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

3. (**/ 1 points**) Rappeler la définition d'un système complet d'évènements, puis donner la formule des probabilités totales.

On appelle système complets d'événements de Ω toute famille $(A_1, \ldots, A_n)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) d'événements telle que :
- pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $[|1,n|]$, on ait $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ tel que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) P(A_i)$$

4. (**/ 1 points**) Donner la formule de Bayes (en utilisant un système complet d'évènements).

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ tel que pour tout $i \in [|1,n|]$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a pour tout $i \in [|1,n|]$:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}.$$

5. (**/ 1 points**) Donner la définition de :
- A et B indépendants : Deux événements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sont indépendants si :
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$
- $A_1, \ldots, A_n$ mutuellement indépendants : $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si pour tout sous-ensemble I de $[|1,n|]$, on a :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$