PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 27 du Mardi 17 Mai 2016

Nom et prénom :

1. (**/ 2 points**) Donner un exemple :

- d'une série grossièrement divergente : $\sum 1$
- d'une série divergente, non grossièrement divergente : $\sum \frac{1}{n}$
- d'une série absolument convergente : $\sum \dfrac{\cos(n)}{n^2}$
- d'une série convergente, non absolument convergente : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$
- d'une série absolument convergente, non convergente : ça n'existe pas, puisqu'une série absolument convergente est convergente

2. (**/ 1 points**) Donner une CNS de convergence pour les séries suivantes :

- $\sum z^n$: $|z| < 1$
- $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$: $\alpha > 1$

3. (**/ 1 points**) Énoncer le critère de comparaison série - intégrale.

Si $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, **positive et décroissante**, alors la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)dt\right)$ sont de même nature.

4. (**/ 2 points**) Énoncer le critère de d'Alembert.

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0, +\infty]$.

- Si $0 \leq \ell < 1$, la série converge.
- Si $\ell > 1$, la série diverge et $\lim u_n = +\infty$.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

5. (**/ 2 points**) Énoncer le critère spécial des séries alternées.

Soit (a_n) une **suite réelle décroissante, positive et qui tend vers** 0. Alors la série $\sum (-1)^n a_n$ converge. De plus :

- les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont ajacentes (de limite S) ;
- le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ est du signe de son premier terme et lui est inférieur en valeur absolue, soit :

$$signe(R_n) = (-1)^{n+1} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \right| \leq a_{n+1}.$$

6. (**/ 2 points**) Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finies rapportées aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Définir $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.

$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est la matrice $Mat_{\mathcal{C}}(u(e_1), \ldots, u(e_p))$ de la famille $(u(e_1), ..., u(e_p))$ dans la base $\mathcal{C}$.

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \ldots & m_{1,j} & \ldots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \ldots & m_{i,j} & \ldots & m_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \ldots & m_{n,j} & \ldots & m_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} m_{i,j} f_i \text{ pour tout } 1 \leq j \leq p.$$