PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 25 du Lundi 2 Mai 2016

Nom et prénom :

1. (**/ 2 points**) Énoncer (th. + formule) le théorème du rang :

Soit E de dimension finie, F quelconque, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors tout supplémentaire de $Ker(f)$ est isomorphe à $Im(f)$.

$$\dim(E) = rg(f) + \dim Ker(f).$$

2. (**/ 4 points**) Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) \ = \ (x + 2y - z, -x + y - 2z, y - z).$$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Soit $u_1 = (x_1, y_1, z_1), u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda u_1 + \mu u_2) &= ((\lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2), -(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) - 2(\lambda z_1 + \mu z_2), \\ &\quad (\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2)) \\ &= \lambda(x_1 + 2y_1 - z_1, -x_1 + y_1 - 2z_1, y_1 - z_1) + \mu(x_2 + 2y_2 - z_2, -x_2 + y_2 - 2z_2, y_2 - z_2) \\ &= \lambda f(u_1) + \mu f(u_2) \end{aligned}$$

b) Déterminer une base du noyau de f.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in Ker(f) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $Ker(f) = Vect(-1, 1, 1)$ et une base de $Ker(f)$ est $(-1, 1, 1)$.

c) Déterminer le rang de f.

Par le théorème du rang, $rg(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(Ker(f)) = 3 - 1 = 2$.

3. (**/ 1 points**) Compléter :

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application linéaire de E dans F telle que $f(e_i) = x_i$ pour tout i.

4. (**/ 3 points**) Compléter (on exprimera F et G en fonction de p et s) :

$$p \circ p = p \qquad\qquad s \circ s = Id_E$$

$$F = Im(p) = Ker(p - Id_E) = Inv(p) = Ker(s - Id_E)$$

$$G = Ker(p) = Ker(s + Id_E)$$