PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 2 du Lundi 14 Septembre 2015

Nom et prénom :

1. (**/2 points**) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Définir f impaire.

   f est impaire si son domaine de définition I est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in I$,
   $$f(-x) = f(x).$$

2. Écrire avec des quantificateurs que f est bornée.
   $$\exists M > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq M.$$

3. Écrire avec des quantificateurs que f n'est pas minorée.
   $$\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) < m.$$

2. (**/2 points**) Citer le théorème de la bijection.

Soit f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

1. f réalise une bijection de I dans l'intervalle $J = f(I)$;
2. son application réciproque f^{-1} est elle-même **continue** sur J, **strictement monotone** et de **même sens de variation** que f.

3. (**/2 points**) Compléter :
$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) \quad ; \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}.$$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $a \in I$.
$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Pour $f : x \mapsto \sqrt{x}$, donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 1.
$$y = \frac{1}{2}(x - 1) + 1.$$

4. (**/4 points**) On considère la fonction $f(x) = \sin(2x) + \sin(x)\cos(3x)$.

1. Déterminer le domaine d'étude de f.

   Les fonctions cos et sin sont définies sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. De plus $\mathbb{R}$ est centré en 0 et on a :
   $$f(-x) = \sin(-2x) + \sin(-x)\cos(-3x) = -\sin(2x) - \sin(x)\cos(3x) = -f(x).$$
   $$f(x + \pi) == \sin(2x + 2\pi) + \sin(x + \pi)\cos(3x + 3\pi) = \sin(2x) + (-\sin(x))(-\cos(3x)) = f(x).$$
   Donc f est impaire et π périodique. On restreint donc son domaine d'étude à $[0, \frac{\pi}{2}[$.

2. Expliquer comment obtenir toute la courbe $\mathcal{C}_f$ à partir de cette étude.

   On obtient alors $\mathcal{C}_f$ grâce à une symétrie de centre 0 et une translation de vecteur $\pi\vec{i}$.