PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 19 du Lundi 7 Mars 2016

Nom et prénom :

1. (**/ 3 points**) Donner les $DL_4(0)$ des fonctions suivantes :

- $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$
- $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$
- $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4 + o(x^4)$
- $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$
- $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$
- $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

2. (**/ 3 points**) Formules : P et Q deux polynômes.

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- Leibniz : $(PQ)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$
- Taylor : $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg(P)} \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$

3. (**/ 1 point**) Énoncer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$. Alors, il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ deg(R) < deg(B) \end{cases}$$

4. (**/ 3 points**) Donner les trois définitions équivalentes de a racine de multiplicité exactement r de P :

(1) $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = (X-a)^r Q$ et $Q(a) \neq 0$

(2) $(X-a)^r$ divise P et $(X-a)^{r+1}$ ne divise pas P ;

(3) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(r-1)}(a) = 0$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$.