PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 14 du Lundi 11 Janvier 2016

Nom et prénom :

1. (**/ 1,5 point**) Soient $a = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\alpha_p}$, $b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\beta_p}$. Compléter :

$$a|b \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P},\ \alpha_p \leq \beta_p \quad ; \quad a \wedge b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\min(\alpha_p,\beta_p)} \quad ; \quad a \vee b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

2. (**/ 3,5 points**) Soient E et F deux ensembles fini, $n = Card(E)$, $p = Card(F)$.
On note $\mathcal{A}(E,F)$ (resp. $\mathcal{I}(E,F)$, $\mathcal{S}(E)$) l'ensemble des applications de E dans F (resp. applications injectives de E dans F, resp. bijectives de E dans F), $\mathcal{P}(E)$ (resp. $\mathcal{P}_k(E)$) l'ensemble des parties de E (resp. des parties à k éléments de E). Compléter :

- $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$
- $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$
- $Card(\mathcal{A}(E,F)) = Card(F)^{Card(E)}$
- $Card(\mathcal{I}(E,F)) = \dfrac{p!}{(p-n)!}$
- $Card(\mathcal{S}(E)) = n!$
- $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.
- $Card(\mathcal{P}_k(E)) = \binom{n}{k}$

3. (**/ 3 points**) Vrai ou Faux :

V F

☐ ■ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est stable pour l'addition et le produit.

☐ ■ Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $A \times B = 0_2$, alors $A = 0_2$ ou $B = 0_2$.

■ ☐ $E_{i,k} \times E_{k,j} = E_{i,j}$.

☐ ■ ${}^t(A \times B) = {}^tA\ {}^tB$.

■ ☐ La somme de deux matrices symétriques est une matrice symétrique.

☐ ■ Si $A, B \in \mathcal{AS}_n(\mathbb{K})$, alors $A \times B \in \mathcal{AS}_n(\mathbb{K})$.

☐ ■ Une matrice triangulaire inférieure est nilpotente.

☐ ■ Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$.

☐ ■ $AP_{i,j}$ est la matrice obtenue à partir de A en permutant les lignes L_i et L_j.

4. (**/ 2 points**) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 5 & 1 & -3 & 12 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice E produit de matrices d'opérations élémentaires, et une matrice R échelonnée réduite par lignes telles que $E \times A = R$.

On procède aux opérations successives suivantes sur les lignes de A : $(L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1)$, $(L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1)$, $(L_2 \leftarrow (-1/3)L_2)$, $(L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2)$, $(L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$, $(L_3 \leftarrow (1/22)L_3)$. On obtient les matrices R et E suivantes :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = D_3(1/22)T_{1,2}(-1)T_{3,2}(4)D_2(-1/3)T_{3,1}(-5)T_{2,1}(-4).$$