PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 13 du Lundi 4 Janvier 2016

Nom et prénom :

1. (**/ 1 point**) Énoncer le théorème de division euclidienne.

On considère un nombre entier naturel n et un nombre entier naturel $b > 0$.
Alors il existe un unique couple (q, r) appartenant à $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que :

$$n = qb + r \text{ et } 0 \leq r < b.$$

2. (**/ 1 point**) Compléter : $\delta = a \wedge b \Leftrightarrow \begin{cases} \delta \text{ divise } a \text{ et } b \\ \forall d \in \mathbb{N}, \Big(d|a \text{ et } d|b\Big) \implies d|\delta \end{cases}$.

3. (**/ 1 point**) Soient $a = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\alpha_p}$, $b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\beta_p}$. Compléter :

$$a \wedge b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\min(\alpha_p,\beta_p)} \quad ; \quad a \vee b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

4. (**/ 3,5 points**) Soient E et F deux ensembles fini, $n = Card(E)$, $p = Card(F)$.
On note $\mathcal{A}(E, F)$ (resp. $\mathcal{I}(E, F)$, $\mathcal{S}(E)$) l'ensemble des applications de E dans F (resp. applications injectives de E dans F, resp. bijectives de E dans F), $\mathcal{P}(E)$ (resp. $\mathcal{P}_k(E)$) l'ensemble des parties de E (resp. des parties à k éléments de E). Compléter :

- $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$
- $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$
- $Card(\mathcal{A}(E, F)) = Card(F)^{Card(E)}$
- $Card(\mathcal{I}(E, F)) = \dfrac{p!}{(p-n)!}$
- $Card(\mathcal{S}(E)) = n!$
- $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.
- $Card(\mathcal{P}_k(E)) = \binom{n}{k}$

5. (**/ 1 point**) Rappeler la formule du binôme : pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

6. (**/ 1,5 points**) Compléter :

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

7. (**/ 1 point**) Compléter :

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$