**PCSI 5** **Note /10**

# Interrogation de cours 12 du Lundi 14 Décembre 2015

**Nom et prénom :**

**1.** ( **/ 1 point**) Énoncer le théorème de division euclidienne.

On considère un nombre entier naturel $n$ et un nombre entier naturel $b > 0$.
Alors il existe un unique couple $(q, r)$ appartenant à $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que :

$$n = qb + r \text{ et } 0 \leq r < b.$$

**2.** ( **/ 2 point**) Compléter : pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, on a $\delta = a \wedge b$

$\Leftrightarrow$ $\delta$ est le dernier reste non nul quand on effectue les divisions euclidiennes successives

$\Leftrightarrow \begin{cases} \delta \text{ divise } a \text{ et } b \\ \forall d \in \mathbb{N}, \Big(d|a \text{ et } d|b\Big) \implies d|\delta \end{cases}.$

**3.** ( **/ 1 point**) Calculer $758 \wedge 306$ par l'algorithme d'Euclide.

$$\begin{aligned} 758 &= 306 \times 2 + 146 \\ 306 &= 146 \times 2 + 14 \\ 146 &= 14 \times 10 + 6 \\ 14 &= 6 \times 2 + 2 \\ 6 &= 2 \times 3 + 0 \end{aligned}$$

Donc $758 \wedge 306 = 2$.

**4.** ( **/ 0,5 point**) Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Rappeler la relation entre $a \wedge b$ et $a \vee b$ :

$$(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab.$$

**5.** ( **/ 1 point**) Calculer $9100 \wedge 1848$ et $9100 \vee 1848$ sachant que $9100 = (2)^2(5)^2(7)(13)$ et $1848 = (2)^3(3)(7)(11)$.

$$9100 \wedge 1848 = 2^2 \times 7 = 28 \quad ; \quad 9100 \vee 1848 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 = 600600$$

**6.** ( **/ 2 point**) Soient $f : I \to I$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = a \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Que peut-on dire :

- Si $f$ est croissante sur $I$ ?

  La suite $(u_n)$ est monotone et :
  1. Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors $(u_n)$ est croissante.
  2. Si $f(u_0) - u_0 \leq 0$, alors $(u_n)$ est décroissante.

- Si $f$ est décroissante sur $I$ ?

  Les suites extraites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont monotones et de monotonie contraire.

**7.** ( **/ 0,5 point**) Que peut-on dire d'une suite dont une sous-suite converge vers $0$ ?

Elle ne converge pas en général. Mais si elle converge, c'est nécessairement vers $0$.

**8.** ( / **2 point**) Donner le terme général des suites définies par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

- $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ ;

  L'équation caractéristique est $r^2 - r + 1/4 = 0$. Son discriminant est nul, et sa racine double est $1/2$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

  $$u_n = (\lambda + \mu n)(1/2)^n.$$

- $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ ;

  L'équation caractéristique est $r^2 - r + 1/2 = 0$. Son discriminant vaut $-1$, ses racines sont $\dfrac{1 \pm i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

  $$u_n = (\frac{1}{\sqrt{2}})^n(\lambda \cos(n\pi/4) + \mu \sin(n\pi/4)).$$