PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 10 du Lundi 30 Novembre 2015

Nom et prénom :

1. (**/ 2 points**) Donner un exemple :

- d'une application injective, non surjective : $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
- d'une application surjective, non injective : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$
- d'une application non injective, non surjective : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
- d'une application bijective : $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$

2. (**/ 1 point**) Pour $f : E \to F$, $A \subset E$, $B \subset F$, compléter :

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\} \qquad f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}.$$

3. (**/ 2 points**) Donner la définition de $\mathcal{R}$ relation d'équivalence sur un ensemble E :

La relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'équivalence si :

- $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$,
- $\mathcal{R}$ est symétrique : $\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,
- $\mathcal{R}$ est transitive : $\forall x, y, z \in E,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$,

Compléter, pour $x \in E$: $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in E | y\mathcal{R}x\}$.

4. (**/ 2 point**) Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Donner deux caractérisations de $M = \sup(A)$:

$$M = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall M' \text{ majorant de } A, M \leq M' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq M \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A \text{ tel que } M - \epsilon < x \end{cases}$$

5. (**/ 1 point**) On considère la partie A de $\mathbb{R}$ définie par $A = \{e^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer, si elles existent, les bornes inférieures et supérieures de A. Justifiez. La partie A est non vide, minorée car $\forall n \in \mathbb{Z},\ e^n \geq 0$, et non majorée car $\lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty$. Elle admet donc une borne inférieure, mais pas de borne supérieure. Montrons que $\inf(A) = 0$. On vient de montrer que 0 est un minorant. Montrons que c'est le plus grand d'entre eux : soit m un minorant de A, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$m \leq e^n.$$

En faisant tendre n vers $-\infty$, on obtient $m \leq 0$. Ainsi 0 est bien le plus grand des minorants.

6. (**/ 2 point**) Ecrire avec des quantificateurs qu'une suite (u_n) :

- est majorée : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
- est stationnaire : $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n = u_N$.
- n'est pas monotone : $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ (u_{n_1} > u_{n_1+1})$ et $(u_{n_2} < u_{n_2+1})$.
- converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in N,\ (n \geq N) \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$.