DS9

Devoir surveillé du 04/06/16

Durée: 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.

Exercice 1

On définit $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ et pour tout $n \geq 2$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & -3 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & -3 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

a) Déterminer une relation de récurrence entre Δ_{n+2}, Δ_{n+1} et Δ_n.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer Δ_n en fonction de n.

Problème 1.

Si A et U sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$(où $n \in \mathbb{N}^*$), on dit que la matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un **pseudo-inverse** de la matrice A si les trois relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} &(1) \quad AUA = A \\ &(2) \quad UAU = U \\ &(3) \quad UA = AU \end{aligned}$$

Le but de ce problème est de caractériser l'existence d'un pseudo-inverse pour une matrice carrée donnée, et d'obtenir une méthode de calcul lorsqu'il existe.

Préliminaires.

1. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que P admet un pseudo-inverse que l'on explicitera.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que A admet un pseudo-inverse. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P^{-1}AP$ admet un pseudo-inverse.

Partie I. Étude d'un exemple.

Dans cette partie, $n = 3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(x, y, z)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ ainsi que sa dimension.
3. La matrice A est-elle inversible? Préciser le rang de A.
4. On pose
$$f_1 = (0, 1, 2), \quad f_2 = (1, 2, 3), \quad f_3 = (1, -1, 1)$$
et on note $\mathcal{C}$ la famille (f_1, f_2, f_3).
   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que (f_1, f_2) est une base de $\mathrm{Im} f$, puis que $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont supplémentaires.
   (c) Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Calculer son inverse.
   (d) Déterminer A', la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.
   On trouvera une matrice de la forme $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (où α, β, γ, δ sont des réels que l'on explicitera) , et l'on posera $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.
5. Justifier que A_1 est inversible et calculer son inverse noté $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ (où α', β', γ' et δ' sont des réels que l'on explicitera).
6. Montrer que la matrice $U' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & 0 \\ \gamma' & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un pseudo-inverse de la matrice A'.
7. Déterminer alors un pseudo inverse U de la matrice A que l'on exprimera en fonction de matrices définies auparavant dans cette partie.
8. Notons π l'endomorphisme canoniquement associé à UA.
   (a) Déterminer la matrice de π dans la base $\mathcal{C}$.
   (b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de π

Partie II. Unicité du pseudo-inverse.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 1$. on suppose que A admet deux pseudo-inverses U et U'.

1. En calculant le produit $AUAU'$ de deux manières différentes, montrer : $UA = AU'$.
2. En déduire que $U = U'$.

On a ainsi prouvé que le pseudo-inverse est unique. On pourra donc parler du pseudo-inverse.

Partie III. Condition d'existence du pseudo-inverse.

Dans cette partie, A désigne un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geq 2$), et f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

1. **Dans cette question seulement, on suppose que A admet un pseudo-inverse U.**
   Ainsi, on a :
   $$(1) \quad AUA = A$$
   $$(2) \quad UAU = U$$
   $$(3) \quad UA = AU$$
   et l'on désigne par g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice U.
   (a) Montrer que $(AU)^2 = AU$. Que peut-on en déduire quant à la nature de l'endomorphisme $f \circ g$?
   (b) i. Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f \circ g$.
   ii. Montrer que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f \circ g$
   (c) En déduire que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires.

2. **Dans cette question seulement, on suppose que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$**
   (a) Montrer que, dans chacun des deux cas où $\mathrm{Ker}(f)$ ou $\mathrm{Im}(f)$ est réduit au vecteur nul, alors la matrice A admet un pseudo-inverse que l'on déterminera.
   On suppose donc, dans la suite de cette question, que ni $\mathrm{Ker}(f)$ ni $\mathrm{Im}(f)$ n'est réduit au vecteur nul.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im} f$ est stable par f et que $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathrm{Im} f & \to & \mathrm{Im} f \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est un automorphisme.
   (c) Montrer l'existence d'une base $\mathcal{C} = (f_1, ..., f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et un entier $r \in [|1, n-1|]$ tels que la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$ soit de la forme
   $$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
   la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} \end{pmatrix}$ étant elle même inversible.
   (d) Démontrer que la matrice A' admet un pseudo-inverse que l'on explicitera à l'aide de A_1.
   (e) Montrer finalement que la matrice A admet un pseudo-inverse.

3. Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que A admette un pseudo-inverse.

Problème 2. Étude d'un procédé de sommation

Notations et rappels.

Pour tout entier naturel n, on note :

- $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$,
- $[|0, n|]$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $0 \leq k \leq n$,

On rappelle :

- la valeur de $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $k \in [|0, n|]$,
- la formule du binôme de Newton: si z_1 et z_2 sont des nombres complexes et n un entier naturel, alors
$$\boxed{(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}}$$

A toute suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe la suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

L'objet de ce problème est de comparer les propriétés de la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ aux propriétés de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$.

Partie I. Étude de deux exemples

1. **Cas d'une suite constante.**
Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha$.

   (a) Expliciter $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.

   (c) La série $\sum_{n\geq 0} a_n$ (resp. $\sum_{n\geq 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

2. **Cas d'une suite géométrique.**
Soit $z \in \mathbb{C}$; on suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_n = z^n$.

   (a) Exprimer a_n^* en fonction de z et n.

   (b) On suppose que $|z| < 1$.

      i. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
      On redémontrera le résultat de cours.

      ii. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.

(c) On suppose que $|z| \geq 1$.

i. Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$?

ii. Quelle est la nature de $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ si $z = -2$?

iii. On suppose $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$.
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ est convergente.

Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$.

Partie II : Étude du procédé de sommation

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles.

1. **Comparaison des convergences des deux suites.**

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un entier k **fixé**, $k \in [|0, n|]$.

i. Justifier que $\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.

ii. En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et n_0 un entier naturel **fixé**.
On considère pour $n > n_0$, la somme $S_{n_0}(n) = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_{n_0}(n)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

(c) On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
On pourra utiliser la définition de la limite.

(d) On suppose que a_n tend vers l (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

(e) La convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

2. **Comparaison des convergences des séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n^*$.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

(a) Pour $n \in [|0, 2|]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k.

(b) Montrer par récurrence sur l'entier n que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k$$

(on pourra remarquer que pour tout $k \in [|0, n|]$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$).

3. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est convergente.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $v_k = S_{k-1}$ et $v_0 = S_{-1} = 0$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n-1} = 2^n v_n^*$.

(b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

4. La convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum a_n^*$?
