DS7

# Devoir surveillé du 19/03/16

La calculatrice est interdite. Durée: 3h

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.*

## Exercice 1

Les différentes questions sont indépendantes.

1. Calculer le développement limité de $x \mapsto \cos(x)^{\tan(x)}$ à l'ordre 3 en 0.
2. Calculer le développement limité de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ à l'ordre 2 en 0.
3. Déterminer la limite lorsque $x$ tend vers 1 de $g(x) = \dfrac{\cos(2\pi x) - 1}{\ln(x) + 1 - x}$.

---

## Exercice 2

On pose :

$$f(x) = x \exp\left(\frac{2}{x}\right) + \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Étudier l'existence d'une éventuelle asymptote à la courbe représentative de $f$ au voisinage de $+\infty$. S'il y a existence, on précisera la position relative avec la courbe représentative de $f$.

---

## Exercice 3

### A. Étude d'une fonction

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{sh}(X) < X\mathrm{ch}(X)$. En déduire les variations de $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer la limite de $f$ en $0^+$.
4. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $f$ admet une développement de la forme :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^5}\right)$$

où $a_0, \ldots, a_4$ sont cinq réels que l'on précisera. En déduire la limite de $f$ en $+\infty$.

### B. Étude d'une suite

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f(x) = 1 + \frac{1}{n}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note $u_n$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

4. Déterminer un équivalent de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

---

**Exercice 4**

1. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] | P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

2. Montrer que $F = \{(aX + b)(X - 1)^3 | a, b \in \mathbb{R}\}$. En déduire $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $F = Vect(P_1, P_2)$.

3. Soit $P = 3X^4 - 8X^3 + 6X^2 - 1$. Montrer que $P \in F$, et exprimer $P$ comme combinaison linéaire de $P_1$ et $P_2$.

---

**Problème.**

Les différentes parties sont dans une large mesure indépendantes.

Dans tout le problème, **on confond (identifie) un polynôme et sa fonction polynomiale associée sur** $[-1, 1]$. Ceci sera justifié en préliminaire.

Le but de ce problème est d'étudier l'approximation d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un segment par des polynômes coïncidant avec $f$ en certains points.

Pour une fonction continue $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, on notera $\|f\|_\infty = \max\limits_{t\in[-1,1]} |f(t)|$ (donc l'existence est assurée par le préliminaire).

## Résultats préliminaires :

1. Si $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ sont tels que $\forall t \in [-1, 1]$, $P(t) = Q(t)$ montrer que $P = Q$. Dans tout le problème on confondra donc polynôme et fonction polynomiale associée sur $[-1, 1]$.

2. Si $f$ est une fonction continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, justifier l'existence de $\max\limits_{t\in[-1,1]} |f(t)|$.

## I. Polynômes de Tchebychev :

Le but de cette partie est de montrer que pour tout polynôme unitaire de degré $n$, $\|P\|_\infty \geq 2^{1-n}$ et que cette inégalité est atteinte pour $P = 2^{1-n}T_n$ (i.e. $\|2^{1-n}T_n\|_\infty = 2^{1-n}$), où $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes définie dans la première partie du problème.
Pour tout entier naturel $n$, on définit sur $[-1, 1]$ la fonction $T_n$ par :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

1. Calculer $T_0$, $T_1$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall x \in [-1, 1],\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

   *On pourra calculer $T_{n+2}(x) + T_n(x)$.*

3. Calculer $T_2$, $T_3$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n$ est une fonction polynomiale.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de $T_n$ et son coefficient dominant.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la parité de $T_n$.
7. (a) Justifier que
$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $[0, \pi]$ l'équation $\cos(n\theta) = 0$.
   (c) On se donne $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $T_n$ est scindé dans $\mathbb{R}$ et déterminer ses racines.
   (d) Donner la factorisation de $T_n$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
   (e) Montrer que :
$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
8. Montrer que $\|T_n\|_\infty = 1$.
9. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = 2^{1-n} T_n$ est un polynôme unitaire et de degré $n$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\|V_n\|_\infty = 2^{1-n}$.
11. Dans cette question, on se donne $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose avoir $P$ un polynôme unitaire tel que $\|P\|_\infty < 2^{1-n}$, c'est à dire que pour tout $t \in [-1, 1]$, $|P(t)| < 2^{1-n}$. Pour $k \in [|0, n|]$, on note $x_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.
   (a) Montrer que $\deg(V_n - P) \leq n - 1$.
   (b) Donner le signe de $(V_n - P)(x_k)$ pour tout $k \in [|0, n|]$.
   (c) En déduire que $V_n = P$. Conclure.

## II Majoration de l'erreur :

Dans cette partie, on se donne $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et on se fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $[-1, 1]$ deux à deux distincts.

On note $P$ l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :
$$\forall i \in [|1, n|], \quad P(a_i) = f(a_i).$$

*On a prouvé l'existence et l'unicité d'un tel polynôme en TD à l'aide des polynômes de Lagrange.*

On note $S = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$.

1. Soit $\phi : x \mapsto f(x) - P(x) - \lambda S(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on **fixe** $t \in [-1, 1] \backslash \{a_1, \ldots, a_n\}$.
   (a) Montrer qu'il est possible de choisir $\lambda$ tel que $\phi(t) = 0$. On fixe ainsi $\lambda$ dans la suite de cette question.
   (b) Montrer que $\phi$ s'annule $n + 1$ fois au moins sur $[-1, 1]$.
   (c) En déduire que $\phi^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1, 1]$.
   (d) Déterminer $\phi^{(n)}$ en fonction de $f^{(n)}$, $n$ et $\lambda$.
   (e) En déduire qu'il existe $a \in [-1, 1]$ tel que $f(t) - P(t) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} S(t)$.

2. Déduire de la question précédente que pour tout $t \in [-1, 1]$, $|f(t) - P(t)| \leq \dfrac{M_n}{n!}|S(t)|$, où $M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$.

3. Pour quel choix de $a_1, \ldots, a_n$ la quantité $\|S\|_\infty$ est-elle minimale ? Montrer qu'alors :

$$\|f - P\|_\infty \leq \frac{M_n}{n!} 2^{1-n}.$$

   *On pourra utiliser le I.*

---