DS5

Correction du devoir surveillé

Exercice 1

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{P}(E)$ est la réunion disjointe des ensembles $E_k = \{X \in \mathcal{P}(E), Card(X) = k\}$ pour $k \in [|0, n|]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} 5^{\mathrm{Card}(X)} &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{X \in E_k} 5^{Card(X)} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{X \in E_k} 5^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} 5^k \left(\sum_{X \in E_k} 1 \right) = \sum_{k=0}^{n} 5^k \binom{n}{k} = (5+1)^n = 6^n\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Soit $n \geq 2$.

$$2^{8n} - 3^{2n} + 13 = \left(2^{4n}\right)^2 - (3^n)^2 + 13 = (2^{4n} - 3^n)(2^{4n} + 3^n) + 13$$

De plus on a $2^{4n} = 16^n = (13+3)^n > 13^n + 3^n \geq 13 + 3^n$, donc $2^{4n} - 3^n > 13$. Ainsi, 13 est le reste de la division euclidienne de $2^{8n} - 3^{2n} + 13$ par $2^{4n} - 3^n$.

Par le cours (algorithme d'Euclide), on a donc

$$pgcd(2^{8n} - 3^{2n} + 13, 2^{4n} - 3^n) = pgcd(2^{4n} - 3^n, 13).$$

2. On a :

$$2^{4n} - 3^n = 16^n - 3^n = (16-3) \sum_{k=0}^{n-1} 16^k 3^{n-1-k} = 13 \left(\sum_{k=0}^{n-1} 16^k 3^{n-1-k} \right)$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} 16^k 3^{n-1-k} \in \mathbb{N}$, donc 13 divise $2^{4n} - 3^n$.

3. Comme 13 divise $2^{4n} - 3^n$, on a $pgcd(13, 2^{4n} - 3^n) = 13$, et donc

$$pgcd(2^{8n} - 3^{2n} + 13, 2^{4n} - 3^n) = 13.$$

Exercice 3

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in E$.
On effectue le dénombrement suivant :

- si $a \in Y$.
  - On choisit $Y \in \mathcal{P}(E)$ contenant a et de cardinal $k \in [|1, n|]$: $\binom{n-1}{k-1}$ choix possibles (on choisit les $k-1$ éléments autres que a parmi les $n-1$ éléments de E distincts de a).
  - On choisit $X \in \mathcal{P}(Y \cup \{a\}) = \mathcal{P}(Y)$: 2^k possibilités.

  Soit au total $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 2^k \underset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 2^{j+1}$
  $= 2(2+1)^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$

- Si $a \notin Y$.

- On choisit $Y \in \mathcal{P}(E)$ ne contenant pas a et de cardinal $k \in [|0, n-1|]$: $\binom{n-1}{k}$ choix possibles (on choisit les k éléments de Y parmi les $n-1$ éléments de E distincts de a).
- On choisit $X \in \mathcal{P}(Y \cup \{a\})$: 2^{k+1} possibilités.

Soit au total $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^{k+1} = 2(2+1)^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$.

On a donc au total : $4 \times 3^{n-1}$ possibilités.

Exercice 4

On va répondre au problème suivant : *Combien y-a-t-il de façons de monter un escalier de n marches en faisant des pas qui montent de 1 ou 2 marches de façon aléatoire.* On appelle T_n ce nombre. On convient que $T_0 = 1$.

1. - $n = 1$: il n'y a qu'une seule façon de monter un escalier de 1 marches en faisant des pas qui montent de 1 ou 2 marches : faire un pas de 1 marche. Donc $T_1 = 1$
   - $n = 2$: il y a deux façons de faire : deux pas de une marche ou un pas de deux marches. Donc $T_2 = 2$.
   - $n = 3$: il y a $T_3 = 3$ façons de faire : trois pas de une marche, un pas de deux marches et un pas de une marche, ou encore un pas de une marche puis un pas de deux marches.
   - $n = 4$: il y a $T_4 = 5$ façons de faire :
     - 4 pas de une marche ;
     - 1 pas de deux, puis deux pas de 1 ;
     - 1 pas de un, puis un pas de deux, puis un pas de 1 ;
     - 2 pas de un, puis un pas de deux ;
     - 2 pas de deux.

2. (a) Pour faire i pas de deux marches, on doit avoir un escalier de plus de $2i$ marches, c'est à dire $2i \leq n$. Ainsi $i \leq \frac{n}{2}$, et puisque i est entier, $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (i est bien sûr positif).

   (b) On fixe i. On fait donc dans notre ascension i pas de deux marches. On gravit donc $2i$ marches de cette manière, et il reste alors $n - 2i$ marches à gravir en faisant des pas de une marche. Ainsi, on fait $n - 2i$ pas de une marche. Il faut ajouter à cela les i pas de deux marches pour obtenir un total de $n - 2i + i = n - i$ pas en tout.

   (c) On suppose que l'on fait i pas de deux marches dans notre ascension. On a vu qu'alors le nombre de pas total est $n - i$, et cela peu importe l'ordre dans lequel on fait les pas de deux marches ou de une marche. Pour déterminer cet ordre, il faut choisir parmi ces $n - i$ pas, les i pas qui correspondent à des pas de deux marches. Ainsi le cardinal recherché est $\binom{n-i}{i}$, nombre de i-combinaisons dans un ensemble à $n - i$ élément.

   (d) Reste alors à sommer sur le nombre $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ de pas à deux marches lors de cette ascension (on a ici partitionné l'ensemble des ascensions en fonction du nombre de pas à deux marches i effectué lors de l'ascension). On obtient donc avec la question précédente :

$$T_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i}.$$

3. (a) On partitionne l'ensemble des ascensions d'un escalier de $n + 2$ marches par la nature du premier pas :
   - si le premier pas de l'ascension est un pas de une marche : il reste alors $n + 1$ marches à gravir, et T_{n+1} façons de les gravir.

- si le premier pas de l'ascension est un pas de deux marches : il reste dans ce cas n marches à gravir, et T_n façons de les gravir.

On a ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = T_{n+1} + T_n.$$

(b) (T_n) satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On résout l'équation caractéristique :

$$r^2 - r - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = r_\pm.$$

Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Reste à déterminer λ et μ grâce à $T_0 = 1$ et $T_1 = 1$. On a :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda r_+ + \mu r_- = 1 \end{cases} \underset{(2)-r_+(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \mu(-\sqrt{5}) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \\ \mu = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

Finalement on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Exercice 5

Partie I : Une première méthode de calcul des puissances de M.

1. On constate, après calculs, que $J^2 = J$. Par une récurrence évidente, on montre que $J^n = J$ pour tout $n \geq 1$. On notera que $J^0 = I_3$.

2. On a $A = 4J - 3I_3$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = (4J - 3I_3)^n$

3. Par la formule du binôme de Newton (les matrices $4J$ et $-3I_3$ commutent) :

$$\begin{aligned}
A^n = (4J-3I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (4J)^k (-3I_3)^{n-k} \\
&= \binom{n}{0}(4J)^0(-3I_3)^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(4J)^k(-3I_3)^{n-k} \\
&= (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k}\right) J \\
&= (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k} - (-3)^n\right) J \\
&= (-3)^n I_3 + \left((4-3)^n - (-3)^n\right) J = (-3)^n I_3 + \left(1 - (-3)^n\right) J = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ 1-(-3)^n & 1 & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 0 & 2-(-3)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Partie II : Une seconde méthode de calcul des puissances de A.

1. On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée $(P|I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Ainsi P est inversible ($P \underset{L}{\sim} I_3$) et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. On montre par un calcul direct que $P^{-1}AP = D$ avec $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. D étant une matrice diagonale, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Or $P^{-1}AP = D$, donc $A = PDP^{-1}$ et par une récurrence évidente, on a $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Reste à faire le produit matricielle. On obtient : $A^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}$.

Partie III : Étude du commutant.

1. (a) On a $BI_n = I_nB = B$ et $0_nB = B0_n = 0_n$, donc $0_n, I_n \in C(B)$.

   (b) Soient M et M' dans $C(B)$, et λ, $\mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda M + \mu M')B &= \lambda MB + \mu M'B \text{ car le produit matriciel est distributif sur l'addition} \\ &= \lambda BM + \mu BM' \text{ car } M, M' \in C(B) \\ &= B(\lambda M + \mu M') \text{ par distributivité du produit matriciel sur l'addition.} \end{aligned}$$

   Donc $\lambda M + \mu M'$ est un élément de $C(B)$.

   (c) Soient M et M' dans $C(B)$. On a :

$$\begin{aligned} (MM')B &= M(M'B) \text{ car le produit matriciel est associatif} \\ &= M(BM') \text{ car } M' \in C(B) \\ &= (MB)M' \text{ car le produit matriciel est associatif} \\ &= (BM)M' \text{ car } M \in C(B) \\ &= B(MM') \text{ car le produit matriciel est associatif} \end{aligned}$$

   Ainsi MM' est encore un élément de $C(B)$.

   (d) On a $I_n \in C(B)$. De même on a clairement $B \in C(B)$ car B commute avec lui-même. Par la question précédente, $B^2 = B \times B \in C(B)$, et par une récurrence immédiate $B^n \in C(B)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Considérons alors C un polynôme en B, c'est à dire $C = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_iB^i$ avec $k \geq 0$ et $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$. C est une combinaison linéaire finie d'éléments de $C(B)$. Par la question (b), C appartient à $C(B)$ (quitte à faire une récurrence immédiate sur k).

(e) Soit M dans $C(B)$, M inversible. On a :

$$MB = BM \quad \Leftrightarrow \quad M^{-1}(MB)M^{-1} = M^{-1}(BM)M^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad BM^{-1} = M^{-1}B.$$

Ainsi M^{-1} est dans $C(B)$.

(f) Pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on observe que ${}^tB \times B \neq B \times {}^tB$. L'ensemble $C(B)$ n'est donc pas stable par transposition en général, puisque dans notre cas particulier par exemple $B \in C(B)$ mais ${}^tB \notin C(B)$.

Avec les hypothèses suivantes, la propriété est vérifiée :

- B symétrique : $\forall M \in C(B)$, on a $MB = BM \Rightarrow {}^t(MB) = {}^t(BM) \Rightarrow {}^tB\,{}^tM = {}^tM\,{}^tB \Rightarrow B\,{}^tM = {}^tMB$. Donc ${}^tM \in C(B)$.
- B antisymétrique : $\forall M \in C(B)$, on a $MB = BM \Rightarrow {}^t(MB) = {}^t(BM) \Rightarrow -B\,{}^tM = -\,{}^tMB \Rightarrow B\,{}^tM = {}^tMB$. Donc ${}^tM \in C(B)$.
- B diagonale (elle est alors symétrique...).

2. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux λ_i sont supposés distincts deux à deux, et soit $M \in C(D)$.

(a) On a $D = D_1(\lambda_1)D_2(\lambda_2)\cdots D_n(\lambda_n)$ produit de matrices de dilatation. On a donc :

- DM est la matrice obtenue à partir de la matrice M en multipliant chaque ligne L_i par λ_i pour tout i.
- MD est la matrice obtenue à partir de la matrice M en multipliant chaque colonne C_j par λ_j pour tout j.

(b) Pour tout $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$, on a par la question précédente $[DM]_{i,j} = \lambda_i[M]_{i,j}$ et $[MD]_{i,j} = \lambda_j[M]_{i,j}$. Puisque $MD = DM$, on obtient que :

$$\lambda_i[M]_{i,j} = \lambda_j[M]_{i,j} \rightarrow (\lambda_i - \lambda_j)[M]_{i,j} = 0.$$

Puisque de plus $i \neq j$, on a $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ et donc $[M]_{i,j} = 0$. Ainsi, M est une matrice diagonale.

(c) On vient de montrer que si M appartient à $C(D)$, alors M est diagonale. Réciproquement, si $M = diag(m_1, \ldots, m_n)$ est une matrice diagonale, alors M commutent avec D qui est diagonale également. En effet, $MD = diag(m_1\lambda_1, \ldots, m_n\lambda_n) = DM$.

Ainsi on a montré par double inclusion que $C(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales.

3. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} M \in C(A) &\Leftrightarrow MA = AM \\ &\Leftrightarrow P^{-1}(MA)P = P^{-1}(AM)P \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}MP)(P^{-1}AP) = (P^{-1}AP)(P^{-1}MP) \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}MP)D = D(P^{-1}MP) \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $M \in C(A) \quad \Longleftrightarrow \quad P^{-1}MP \in C(D)$.

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $C(D)$. Alors $MD = DM$ équivaut à :

$$\begin{pmatrix} -3a & b & c \\ -3d & e & f \\ -3g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

En identifiant coefficients par coefficients, on obtient que cette égalité matricielle est équivalente à $-3b = b$, $-3c = c$, $-3d = d$ et $-3g = g$, soit $b = c = d = g = 0$.

Ainsi les éléments de $C(D)$ sont exactement les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$ avec a, b, c, d et e des réels quelconques.

(c) On a $M \in C(A)$ si et seulement si $P^{-1}MP \in C(D)$, soit si et seulement si il existe $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tels que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$. On obtient donc que $M \in C(A)$ si et seulement si M est de la forme :

$$\begin{aligned} M &= P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= aPE_{1,1}P^{-1} + bPE_{2,2}P^{-1} + cPE_{2,3}P^{-1} + dPE_{3,2}P^{-1} + ePE_{3,3}P^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $C(A)$ est l'ensemble des combinaison linéaire des cinq matrices $PE_{1,1}P^{-1}$, $PE_{2,2}P^{-1}$, $PE_{2,3}P^{-1}$, $PE_{3,2}P^{-1}$ et $PE_{3,3}P^{-1}$.

Exercice 6

1. **Etude de f**

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ est défini si et seulement si $x - \lfloor x \rfloor \neq 0$
si et seulement si $x \neq \lfloor x \rfloor$
si et seulement si $x \in \mathbb{Z}$

Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors, $x + 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $f(x+1) = \dfrac{1}{x + 1 - \lfloor x + 1 \rfloor}$.

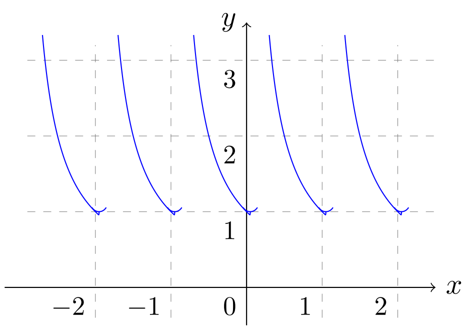
Or, $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ car $1 \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $f(x+1) = \dfrac{1}{x + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1)} = \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor} = f(x)$, et f est 1-périodique.

(b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in]k, k+1[$, on a $f(x) = \dfrac{1}{x - k}$. Donc f est strictement décroissante sur $]k, k+1[$.

On a $\lim\limits_{x \to k^+} (x - \lfloor x \rfloor) = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \to k^+} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x \to (k+1)^-} f(x) = 1$.

On obtient que $f(]k, k+1[) =]1, +\infty[$ car f est continue sur $]k, k+1[$, et le graphe de f est :



(c) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Supposons $f(x) \in \mathbb{Q}$. Alors $x - \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Q}$ donc $x \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Soit $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Alors, $x - \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Q}$ donc $f(x) \in \mathbb{Q}$. Donc : $\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z},\ f(x) \in \mathbb{Q}$.

2. **Une suite récurrente**

(a) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini et $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
x_0 est bien défini et $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons x_n bien défini et $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Alors, $f(x_n)$ existe et $f(x_n) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini.

(b) i. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{Q}$.
Pour $n = 0$, $x_0 \in \mathbb{Q}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $x_n \in \mathbb{Q}$. Alors, $x_{n+1} = f(x_n) \in \mathbb{Q}$ d'après la question 1.c.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{Q}$.
Soit $n \geq 1$. $x_n = f(x_{n-1}) \in f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \in]1, +\infty[$ d'après la question 1.c.
Donc pour tout $n \geq 1$, $x_n > 1$.

ii. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ et $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.
Pour $n = 0$, $x_0 = \dfrac{u_0}{v_0}$ et $v_0 \in \mathbb{N}^*$ donc $v_0 > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ et $v_n > 0$.
Alors, v_{n+1} est égal au reste de la division euclidienne de u_n par v_n.
Ainsi, il existe $q_n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$u_n = q_n v_n + v_{n+1} \qquad \text{et } 0 \leq v_{n+1} < v_n$$

- Si $v_{n+1} = 0$, alors $u_n = q_n v_n$. Donc $x_n = \dfrac{u_n}{v_n} = q_n \in \mathbb{N}$.
  Ainsi, $x_{n+1} = f(x_n)$ n'est pas défini, ce qui est absurde.
  Ainsi, $v_{n+1} > 0$.
- $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{v_n}{u_n - q_n v_n} = \dfrac{1}{\dfrac{u_n}{v_n} - q_n} = \dfrac{1}{x_n - q_n}$.
  De plus, $x_n = \dfrac{u_n}{v_n} = q_n + \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ et $0 \leq v_{n+1} < v_n$.
  Donc $q_n \leq x_n < q_n + 1$. D'où comme $x_n \in \mathbb{N}$, $q_n = \lfloor x_n \rfloor$.
  Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor} = f(x_n) = x_{n+1}$.

On a donc prouvé par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n > 0 \qquad \text{et} \qquad x_n = \frac{u_n}{v_n}$$

iii. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a montré que $v_n > 0$. De plus, v_{n+1} est le reste dans la division euclidienne de u_n par v_n, donc $v_{n+1} < v_n$. La suite (v_n) est donc strictement décroissante. (v_n) est une suite strictement décroissante d'entiers minorée par 0 ce qui est impossible. Ainsi, si $x_0 \in \mathbb{Q}$, la suite (x_n) n'est pas définie.

(c) D'après a. et b., (x_n) est définie si et seulement si $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

3. **Le cas irrationnel**

(a) i. $x_0 = \sqrt{2}$
$x_1 = f(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$.
$x_2 = f(x_1) = f(\sqrt{2} + 1) = \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1 - \lfloor \sqrt{2} + 1 \rfloor}$.
Or, $2 < \sqrt{2} + 1 < 3$. Ainsi, $\lfloor \sqrt{2} + 1 \rfloor = 2$.
Finalement, on obtient : $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$.

ii. On a $f\left(\sqrt{2} + 1\right) = \sqrt{2} + 1$ d'après les calculs précédents. Donc $\sqrt{2} + 1$ est un point fixe de f. Puisque $x_1 = \sqrt{2} + 1$. Par une récurrence immédiate, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = x_1$. Ainsi, (x_n) est stationnaire.

(b) i. $x_0 = \sqrt{3}$
$x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.
On a $1 < \sqrt{3} < 2$ d'où $1 < \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} < \dfrac{3}{2}$, et donc $\left\lfloor \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1$.

$$x_2 = f(x_1) = f\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1}$$
$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$$

On a $2 < \sqrt{3}+1 < 3$, d'où $\lfloor \sqrt{3}+1 \rfloor = 2$.

$$x_3 = f(x_2) = f(\sqrt{3}+1) = \frac{1}{\sqrt{3}+1-\lfloor \sqrt{3}+1 \rfloor} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = x_1.$$

$$x_4 = f(x_3) = f\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = \sqrt{3}+1 = x_2.$$

ii. $f \circ f\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = f(\sqrt{3}+1) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ d'après les calculs précédents. Donc $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ est un point fixe de $f \circ f$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = f \circ f(x_n)$, et $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.
On obtient par récurrence immédiate que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{2n+1} = x_1$, et donc (x_{2n+1}) est stationnaire.
De même, $\sqrt{3}+1$ est un points fixe de $f \circ f$ et $x_2 = \sqrt{3}+1$, et par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{2n} = x_2$. Donc (x_{2n}) est stationnaire.