DS2

Correction du Devoir surveillé du 10/10/15

Exercice 1

1. La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1,1]$. arccos est définie sur $[-1,1]$ donc $\arccos\circ\cos$ est définie sur $\mathbb{R}$. la fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1,1]$ donc $\arcsin\circ\sin$ est définie sur $\mathbb{R}$.
   En conclusion, f est définie sur $\mathbb{R}$.
   Toutes les fonctions composant f sont continues sur leurs domaines de définition respectifs. f est donc continue sur son domaine de définition, c'est à dire sur $\mathbb{R}$.

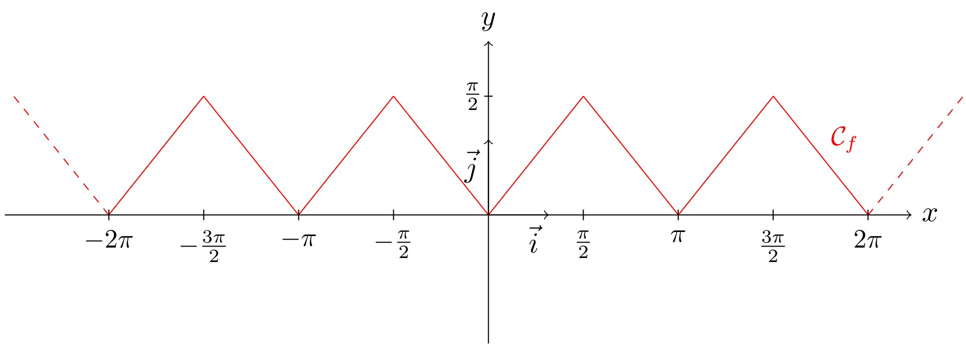
2. $\forall x\in\mathbb{R},\ -x\in\mathbb{R}$. De plus, $\cos(-x)=\cos(x)$. Ainsi, $f(-x)=f(x)$.
   f est donc paire.

3. Pour tout $u\in[-1,1]$, posons $g(u)=\arccos(-u)+\arccos(u)$.
   g est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $u\in]-1,1[$, $g'(u)=\dfrac{1}{\sqrt{1-(-u)^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}=0.$
   g est donc constante sur $]-1,1[$. De plus, $g(0)=2\arccos(0)=\pi$. Ainsi, pour tout $u\in]-1,1[$, $g(u)=\pi$.
   Or, g est continue en 1 et en -1 donc on a : $\forall u\in[-1,1],\ g(u)=\pi$.

4. $\forall x\in\mathbb{R},\ x+\pi\in\mathbb{R}$.
   Et : $f(x+\pi)=\arcsin\left[\sin\left(\arccos(\cos(x+\pi))\right)\right]=\arcsin\left[\sin\left(\arccos(-\cos(x))\right)\right]=\arcsin\left[\sin\left(\pi-\arccos(\cos(x))\right)\right]$ d'après la question précédente.
   Ainsi, $f(\pi+x)=\arcsin\left[\sin\left(\pi-\arccos(\cos(x))\right)\right]=\arcsin\left[\sin\left(\arccos(\cos(x))\right)\right]=f(x)$.
   Donc f est π-périodique.

5.
   - f étant π-périodique, il suffit de tracer la courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$, sur un intervalle de longueur π puis d'effectuer des translations de vecteur $k\pi\vec{i}$, $k\in\mathbb{Z}$. On fait le choix d'étudier f sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   - De plus, f est paire. Il suffit donc de l'étudier sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ puis d'effectuer une symétrie de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des ordonnées.
   - Pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arccos(\cos(x))=x$. Ainsi, $f(x)=\arcsin(sin(x))=x$.

   On obtient finalement la courbe suivante :



Exercice 2

1. Posons $h(x) = 2\text{sh}(x) + 1$. La fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}$ puisque sh l'est. Elle est de plus dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h'(x) = 2\text{ch}(x)$.Puisque $h'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction h est strictement croissante.

   Calculons les limites de h en $\pm\infty$: on sait que $\lim_{x\to+\infty} \text{sh}(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \text{sh}(x) = -\infty$. D'où immédiatement $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$.

   On a donc montré que h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} h(x)\right[=]-\infty, +\infty[$. L'équation $h(x) = 0$ admet donc une unique solution a sur $\mathbb{R}$. En particulier, h est négative sur $]-\infty, a]$ et positive sur $[a, +\infty[$, et on a :
   $$h(a) = 0 \Rightarrow 2\text{sh}(a) + 1 = 0 \Rightarrow \text{sh}(a) = -\frac{1}{2}.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $u(x) = \text{ch}^2(x) + \text{sh}(x)$. La fonction u est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions continues. Elle est de plus dérivable sur cet intervalle, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$u'(x) = 2\text{sh}(x)\text{ch}(x) + \text{ch}(x) = \text{ch}(x)(2\text{sh}(x) + 1).$$
   Puisque $\text{ch}(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x)$ est du signe de $2\text{sh}(x)+1$. On obtient donc le tableau de variations suivant pour u :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
u		$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	

   En particulier u admet un minimum global en a qui vaut :
   $$u(a) = \text{ch}^2(a) + \text{sh}(a) = 1 + \text{sh}^2(a) + \text{sh}(a) = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} > 0.$$
   Ainsi $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Posons $f(x) = e^{\text{sh}(x)} - x - 1$. La fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme composée et sommes de fonctions continue. Elle est de plus dérivable sur cet intervalle, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$f'(x) = \text{ch}(x)e^{\text{sh}(x)} - 1.$$
   La fonction f' est de nouveau dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$f''(x) = (\text{ch}(x)^2 + \text{sh}(x))e^{\text{sh}(x)} = u(x)e^{\text{sh}(x)}.$$
   Par ce qu'on a fait à la question 2., on en déduit que $f''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et donc que f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient donc le tableau de variations suivant pour f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

En particulier, on obtient que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Par la question 3., on a déjà que $1 + x \leq e^{sh(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc en particulier pour $x \in]0,1[$. Montrons la deuxième inégalité. Soit donc $x \in]0,1[$. On applique l'inégalité du 3. à $-x$:
$$0 < 1 - x \leq e^{\mathrm{sh}(-x)} = e^{-\mathrm{sh}(x)}$$
car la fonction sh est impaire. D'où en passant à l'inverse : $e^{\mathrm{sh}(x)} \leq \dfrac{1}{1-x}$.

   On obtient finalement l'inégalité suivante, valable pour tout $x \in]0,1[$: $1 + x \leq e^{\mathrm{sh}(x)} \leq \dfrac{1}{1-x}$.

5. On applique le logarithme aux inégalités précédentes (rappelons que le logarithme est strictement croissant et conserve donc les inégalités, et qu'on a ici à faire à des nombres strictement positifs pour lesquels on peut bien appliquer ln) : pour tout $x \in]0,1[$,
$$\ln(1+x) \leq \mathrm{sh}(x) \leq -\ln(1-x).$$

   À présent pour $n \geq 2$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{k} \in]0,1[$ pour tout $n \leq k \leq np$. On peut donc prendre $x = 1/k$ dans les inégalités précédentes. D'où
$$\ln(1 + 1/k) \leq \mathrm{sh}(1/k) \leq -\ln(1 - 1/k),$$
soit encore :
$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$$
pour tout $n \leq k \leq np$. On peut donc sommer ces inégalités pour $n \leq k \leq np$. On obtient :
$$\sum_{k=n}^{np} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \sum_{k=n}^{np} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq -\sum_{k=n}^{np} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$$
soit encore :
$$\sum_{k=n}^{np}(\ln(k+1) - \ln(k)) \leq S_n \leq -\sum_{k=n}^{np}(\ln(k-1) - \ln(k).$$
Les sommes à gauche et à droite sont télescopiques. On obtient donc finalement :
$$\ln(np+1) - \ln(n) \leq S_n \leq -(\ln(n-1) - \ln(np).$$

   On a ainsi montré que pour tout $n \geq 2$:
$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right).$$

6. On fixe l'entier $p \in \mathbb{N}^*$ et on passe à la limite quand $n \to +\infty$. On a :
$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(p + \frac{1}{n}\right) = \ln(p)$$
$$\lim_{n\to+\infty} -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{np}\right) = -\ln(1/p) = \ln(p)$$
Par le théorème des gendarmes, on en déduit finalement que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln(p)$.

   Déterminer alors la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

1. On sait que pour tout $x \in]0, 2\pi[$, $e^{ix} \neq 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} Z &\overset{\text{F. de Moivre}}{=} \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k = \frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}} \overset{\text{F. de Moivre}}{=} \frac{1-(e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} \\ &= \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \overset{\text{F. d'Euler}}{=} e^{i\frac{nx}{2}} \times \frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= e^{i\frac{nx}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

2. (a) $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - \sin(0) - \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - \sin(0) - \sin(\pi) = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ car $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$.

   (b) En utilisant la question précédente, $S_n = \sum_{k=0}^{n} Im\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = Im\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$. On peut alors utiliser la première question, en prenant $x = \frac{\pi}{n} \in]0, 2\pi[$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} S_n &= Im\left(e^{i\frac{n\pi}{2n}} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} Im\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} Im\left(i\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \end{aligned}$$

   car $n \geq 2$ donc $\frac{\pi}{2n} \neq \frac{\pi}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \neq 0$.

   (c) Prenons $n = 4$. On a bien $n \geq 2$. D'après la question précédente, on a donc :

$$\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} = S_4 = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

   Ainsi, $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$.

   (d) Pour tout $n \geq 2$, on a : $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\pi}{2n}}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

   Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2n} = 0$. Donc en utilisant que $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$, on obtient que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{\pi}{2n}} = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{2}{\pi}$

Problème 1

1. tan est définie pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) \neq 0$, i.e. $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. On a donc $D = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

3. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont, g comme composée et quotient (le dénominateur ne s'annulant pas puisque ch est à valeurs positives) de fonctions qui le sont.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sh}'(x)\frac{1}{1+\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}(x)}{2(\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x))} = \frac{\mathrm{ch}(x)}{2\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{2\mathrm{ch}(x)}$$

et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)' \frac{1}{1+\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)^2} = \frac{\mathrm{ch}(x)(1+\mathrm{ch}(x))-\mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2} \times \frac{(1+\mathrm{ch}(x))^2}{(1+\mathrm{ch}(x))^2+\mathrm{sh}^2(x)} \\ &= \frac{\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)}{1+2\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}(x)+1}{\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)+2\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)} \\ &= \frac{\mathrm{ch}(x)+1}{2\mathrm{ch}(x)+2\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{2\mathrm{ch}(x)} \end{aligned}$$

(c) On a vu dans la question précédente que pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g'(x)$, ce qui donne $(f-g)'(x) = 0$. La fonction $f-g$ est donc constante sur $\mathbb{R}$, de valeur $(f-g)(0) = f(0)-g(0) = 0$. On a donc $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $2f(x) = \arctan(\mathrm{sh}(x)) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi $2f(x) \in D$ et $\tan(2f(x))$ est bien défini. De plus,

$$\tan(2f(x)) = \tan(\arctan(\mathrm{sh}(x))) = \mathrm{sh}(x).$$

(b) La fonction h est dérivable comme quotient de fonctions qui le sont (le dénominateur ne s'annulant pas), et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)(1+\mathrm{ch}(x))-\mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2} = \frac{\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2} = \frac{1+\mathrm{ch}(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2} = \frac{1}{1+\mathrm{ch}(x)} > 0$$

donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$h(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)} = \frac{2\mathrm{sh}(x)}{2+2\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x-e^{-x}}{2+e^x+e^{-x}} = \frac{1+e^{-2x}}{1+2e^{-x}+e^{-2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et de même (ou par imparité de h), $h(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$. Comme h est strictement croissante, on en déduit que pour $x \in \mathbb{R}$, $-1 < h(x) < 1$.

(c) D'après la question précédente, pour $x \in \mathbb{R}$, $-1 < h(x) < 1$. Comme arctan est strictement croissante, ceci implique $-\frac{\pi}{4} < \arctan(h(x)) < \frac{\pi}{4}$ puis $2g(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi $2g(x) \in D$ et $\tan(2g(x))$ est bien défini. De plus, on calcule :

$$\begin{aligned} \tan(2g(x)) &= \frac{2\tan(g(x))}{1-\tan^2(g(x))} = \frac{2\tan(\arctan(h(x)))}{1-\tan^2(\arctan(h(x)))} = \frac{2h(x)}{1-h(x)^2} \\ &= \frac{\frac{2\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}}{1-\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)^2} = \frac{2\mathrm{sh}(x)(1+\mathrm{ch}(x))}{(1+\mathrm{ch}(x))^2-\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{2\mathrm{sh}(x)(1+\mathrm{ch}(x))}{1+2\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)} \\ &= \frac{2\mathrm{sh}(x)(1+\mathrm{ch}(x))}{2+2\mathrm{ch}(x)} = \mathrm{sh}(x) \end{aligned}$$

(d) Les deux questions précédentes montrent que pour $x \in \mathbb{R}$, $\tan(2f(x)) = \tan(2g(x))$, donc $2f(x) \equiv 2g(x) \ [\pi]$. Or on a vu au 4.b que $2f(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et au 4.c que $2g(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi $2f(x) = 2g(x)$ et $f(x) = g(x)$.

5. On a

$$\mathrm{ch}(\frac{1}{2}\ln(3)) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)}+e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2} = \frac{3^{1/2}+3^{-1/2}}{2} = \frac{3+1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

et de même $\text{sh}(\frac{1}{2}\ln(3)) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. L'égalité $f(x) = g(x)$ en $x = \frac{1}{2}\ln(3)$ donne donc :

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right) \quad \text{i.e.} \quad \frac{\pi}{12} = \arctan\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right).$$

On en déduit que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Problème 2

1. (E_2) : $z^2 + z + 1 = 0$.

   Le discriminant vaut $\Delta = -3$. Ainsi, les solutions de (E_2) sont $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$ et $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2$. Elles sont toutes deux de modules 1 donc strictement inférieur à 2.

2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to-\infty} f(t) = -\infty$.
   Ainsi, f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi, l'équation $f(t) = 0$ admet une unique solution réelle que l'on note r.
   De plus, $f(-1) = -1 < 0$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} > 0$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $r \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$.

   (b) Si on développe l'expression de P, on obtient :

   $$X^3 + X + 1 = X^3 - X^2(z_1 + z_2 + r) + X(rz_1 + rz_2 + z_1z_2) - rz_1z_2$$

   Par identification des coefficients, on a : $\begin{cases} z_1 + z_2 + r = 0 \\ rz_1 + rz_2 + z_1z_2 = 1 \\ -rz_1z_2 = 1 \end{cases}$.

   D'où $z_1 + z_2 = -r$. De plus, $r \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$, ainsi, $r \neq 0$. On en déduit donc que $z_1z_2 = -\frac{1}{r}$.

   (c) D'après la question précédente, on a : $|z_1 + 1_2| = |-r| = |r| \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ d'après la question 2.(a). D'où, $\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1$.
   De même, $|z_1z_2| = \left|\frac{-1}{r}\right| = \left|\frac{1}{r}\right| = dfrac{-1}{r}$. Or, $-1 < r < -\frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2} < -r < 1$ et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^+$, on a : $2 > \frac{-1}{r} > 1$. Finalement, on obtient : $1 < |z_1z_2| < 2$.

   (d) On sait que $1 < |z_1z_2| < 2$ donc $|z_1| \neq 0$ et $\frac{1}{|z_1|} < |z_2| < \frac{2}{|z_1|}$. Si on suppose de plus que $|z_1| \geq 2$, on obtient alors : $\frac{1}{|z_1|} \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, $|z_2| < \frac{2}{2} = 1$.
   $|z_1| = |z_2 + z_1 - z_2| \leq |z_2| + |z_1 + z_2|$ d'après l'inégalité triangulaire. Or, d'après la question 2. (c), on sait que $|z_1 + z_2| < 1$. Finalement, on obtient : $|z_1| \leq |z_2| + 1$.
   Si on suppose $|z_1| \geq 2$, on a donc montré que $|z_1| \leq 1 + |z_2| < 2$ Absurde.

   (e) D'après la démonstration par l'absurde de la question précédente, on sait que $|z_1| < 2$. Par symétrie des rôles de $|z_1|$ et $|z_2|$, on obtient de même $|z_2| < 2$ Enfin, d'après la question 2.(a), $r \in \left]-\frac{1}{2}, -1\right[$ donc $|r| < 1 < 2$.

3. (a) ϕ est dérivable sur $[2, +\infty[$ et pour tout $t \in [2, +\infty[$, $\phi'(t) = nt^{n-1} - 1$. Puisque $t \geq 2$ et $n \geq 2$, on a $nt^{n-1} - 1 \geq n2^{n-1} - 1 \geq 2 - 1 = 1$. Ainsi, ϕ est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty} \phi(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^n = +\infty$ et $\phi(2) = 2^n - 3$.
Or, par croissance de ϕ sur $[2, +\infty[$, on en déduit que pour tout $t \in [2, +\infty[$, $\phi(t) \geq \phi(2) \geq 4 - 3 = 1$ car $n \geq 2$. Ainsi, ϕ est strictement positive sur $[2, +\infty[$.

   (b) Supposons que $z^n = z + 1$. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $|z| \geq 2$.
$z^n = z + 1$ donc $z^n = -z - 1$. Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire, on en déduit que :$|z^n| \leq |-z-1| \leq |z| + 1$.
De plus, on suppose que $|z| \geq 2$, d'après la question précédente, on en déduit que $\phi(|z|) > 0$ ($\phi(|z|)$ est bien défini car $|z| \geq 2$). Ainsi, $|z^n| > |z| + 1$.
On obtient ainsi une contradiction.
On a donc bien montré que $\Big(z^n + z + 1 = 0\Big) \implies \Big[|z| < 2\Big)$.

   (c) La réciproque est fausse. Prenons $z = 1$. On a bien $|z| < 1$ et pourtant $z^n + z + 1 = 3 \neq 0$.

Problème 3

1. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. Elle est de plus dérivable sur cet intervalle, et on a $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On obtient le tableau de variation suivant pour f :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-24	$\nearrow$	$+\infty$

On calcule les limites de f en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{12}{x^2} - \frac{8}{x^3}\right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{12}{x^2} - \frac{8}{x^3}\right) = -\infty$$

D'après le tableau de variation, la fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, -2]$. Elle réalise donc une bijection de $]-\infty, -2]$ sur $]-\infty, 8]$. Puisque $0 \in]-\infty, 8]$, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty, -2[$.

On montre de même que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-2, 2[$, et une unique dans l'intervalle $]2, +\infty[$.

Il y a donc exactement 3 solutions réelles à l'équation (E).

2. (a) On a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3i\therefore} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta})$$
$$= \frac{1}{8}(2\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta).$$

(b) On cherche les solutions de (E) sous la forme $x = a\cos(\theta)$ (avec a et θ réels). On a :

$$\begin{aligned}f(a\cos(\theta)) = a^3\cos^3(\theta) - 12a\cos(\theta) - 8 &= a^3\left(\frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)\right) - 12a\cos(\theta) - 8\\ &= \frac{a^3}{4}\cos(3\theta) + (\frac{3a^3}{4} - 12a)\cos(\theta) - 8\end{aligned}$$

Pour $a = 4$, on a $\frac{3a^3}{4} - 12a = 0$, et donc $4\cos(\theta)$ est solution de (E) si et seulement si $16\cos(3\theta) = 8$.

(c) On doit donc résoudre l'équation $\cos(3\theta) = \frac{1}{2}$. Ceci est équivalent à $3\theta \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $3\theta \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$, soit encore à $\theta \equiv \dfrac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$.
On obtient finalement $\theta \equiv \dfrac{\pi}{9}[2\pi]$, $\theta \equiv \dfrac{7\pi}{9}[2\pi]$, $\theta \equiv \dfrac{13\pi}{9}[2\pi]$ ou $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{9}[2\pi]$, $\theta \equiv \dfrac{5\pi}{9}[2\pi]$, $\theta \equiv \dfrac{11\pi}{9}[2\pi]$
Ainsi les valeurs possibles pour $4\cos(\theta)$ sont donc $4\cos(\pi/9)$ $(= 4\cos(-\pi/9)$, $4\cos(5\pi/9)$ $(= 4\cos(13\pi/9))$ et $4\cos(7\pi/9)$ $(= 4\cos(11\pi/9))$.
Finalement on a obtenu 3 solutions de l'équation (E), qui sont $4\cos(\pi/9)$, $4\cos(5\pi/9)$ et $4\cos(7\pi/9)$. Puisque d'après 1., on sait qu'il y a exectement 3 racines réelles à cette équation, on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc :

$$\{4\cos(\pi/9), 4\cos(5\pi/9), 4\cos(7\pi/9)\}$$

3. (a) Soit $x = u + v$ une solution de (E), avec $u, v \in \mathbb{C}$. On a en remplaçant dans (E) :

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 12u - 12v - 8 = 0$$

soit encore :

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 12(u+v) - 8 = 0.$$

Supposons que $uv = 4$, on obtient alors en remplaçant $u^3 + v^3 = 8$.

(b) On suppose toujours que $uv = 4$. On a donc $u^3 + v^3 = 8$, et $u^3v^3 = 64$. On sait alors que u^3 et v^3 sont solutions du polynôme du second degré suivant : $P(X) = X^2 - 8X + 64$. Le discriminant de ce polynôme vaut -3×64, et les racines sont donc $4 \pm 4i\sqrt{3} = 8e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$. Ainsi, les valeurs possibles pour u^3 et v^3 sont :

$$\begin{cases} u^3 = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \\ v^3 = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u^3 = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ v^3 = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

(c) On doit donc chercher les racines 3-ièmes de l'unité de $8e^{i\frac{\pi}{3}}$. Une racine 3-ième particulière est donnée par $2e^{i\frac{\pi}{9}}$, on obtient alors toutes les autres en multipliant par les racines troisièmes de l'unité : $2e^{i\frac{\pi}{9}}, 2e^{i\frac{7\pi}{9}}, 2e^{i\frac{13\pi}{9}}$.
En utilisant que $uv = 4$, on obtient finalement 6 couples possibles pour (u, v) :

$$(2e^{i\frac{\pi}{9}}, 2e^{-i\frac{\pi}{9}}), \quad (2e^{i\frac{7\pi}{9}}, 2e^{-i\frac{7\pi}{9}}), \quad (2e^{i\frac{13\pi}{9}}, 2e^{-i\frac{13\pi}{9}})$$

$$(2e^{-i\frac{\pi}{9}}, 2e^{i\frac{\pi}{9}}), \quad (2e^{-i\frac{7\pi}{9}}, 2e^{i\frac{7\pi}{9}}), \quad (2e^{-i\frac{13\pi}{9}}, 2e^{i\frac{13\pi}{9}}).$$

Les 3 solutions $x = u + v$ correspondantes sont donc

$$4\cos(\frac{\pi}{9}), \quad 4\cos(\frac{7\pi}{9}), \quad 4\cos(\frac{13\pi}{9}) = 4\cos(\frac{5\pi}{9}).$$

On a ainsi obtenu de cette manière 3 solutions de l'équation (E). Puisque qu'on a vu qu'il y en avait exactement trois, on les a toutes obtenues. On retrouve en particulier les solutions qu'on avait obtenu précédemment.