DS1

Devoir surveillé du 19/09/15

La calculatrice est interdite. Durée: 3h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 11$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad u_n = 3u_{n-1} + 4u_{n-2}.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n + 3 \cdot 4^n$.

Exercice 2

1. (a) Énoncer la définition d'une fonction croissante sur $[0, +\infty[$.
   (b) Énoncer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction f suivante est croissante :

$$f : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+x}. \end{array}$$

3. Déduire des questions précédentes que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Problème I

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction $f : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x}{1-e^x} \end{array}$ et sa réciproque.

1. Étude de f
   (a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
   (b) Dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$ (en précisant les limites aux bornes du domaine) et donner l'allure de son graphe. On tracera également les éventuelles d'asymptotes.
   (c) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = f(x) + f(x)^2$.
2. Montrer que f est bijective de $]0, +\infty[$ dans I, où I est un intervalle que l'on précisera.
3. On note $\phi : I \to]0, +\infty[$ la réciproque de f. Quelle est la monotonie de ϕ ? Tracer l'allure du graphe de ϕ.
4. Montrer que ϕ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. (a) Montrer, à la main, que f est bijective de $]0, +\infty[$ dans I.
   (b) En déduire une expression de ϕ et retrouver le résultat de la question 4. à partir de cette expression.

Problème II

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x)+f(y)| = |x+y|. \qquad (E)$$

1. (a) On pose :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x. \end{array}$$

Montrer que f_1 vérifie (E).

(b) On pose :

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x. \end{array}$$

Montrer que f_2 vérifie (E).

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les deux propriétés suivantes, une est vraie, laquelle ? On prouvera cette propriété.

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x) \qquad (P_1),$$

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x) \qquad (P_2).$$

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (E).

(a) Montrer que $f(0) = 0$.

(b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|.$$

(c) i. Ecrire la négation de la propriété :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x).$$

ii. En raisonnant par l'absurde, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x).$$

4. Conclure. On précisera bien le raisonnement utilisé.

Problème III

Le but de cet exercice est d'étudier l'équation suivante (où λ est un réel strictement positif) :

$$e^{\lambda e^{\lambda x}} = x. \qquad (E)$$

Partie I : Réduction du problème.

On pose $f(x) = \exp(\lambda x)$.

1. Étudier le domaine de définition de f, ses variations ainsi que les limites aux bornes de son domaine de définition.

2. Dans cette question nous montrons qu'un réel x est solution de (E) si et seulement si $f(x) = x$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$. Montrer que x est solution de (E).

(b) Réciproquement, montrer que si x est solution de (E), alors $f(x) = x$.
Indication : On raisonnera par l'absurde, en différenciant les cas $f(x) > x$ et $f(x) < x$.

Partie II : Étude de l'équation $f(x) = x$.

3. Étudier les variations de $g : x \mapsto f(x) - x$ en précisant les limites aux bornes de son domaine de définition. Préciser la valeur de ses extremum éventuels.

4. En déduire que :

   - si $\lambda > \frac{1}{e}$, alors l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution,
   - si $\lambda = \frac{1}{e}$, alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution à déterminer,
   - si $\lambda < \frac{1}{e}$, alors l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions, l'une d'elles appartenant à l'intervalle $]0, -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}[$ et l'autre à l'intervalle $]-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}, +\infty[$.

Partie III : Étude d'une suite associée à f.

On suppose dans cette partie $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ et on note α l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $]0, -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}[$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

5. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \alpha]$.

6. Montrer que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$. En déduire la monotonie de la suite (u_n).

7. Montrer alors que la suite (u_n) converge vers une limite finie qu'on notera ℓ, appartenant à l'intervalle $[0, \alpha]$.

8. Montrer que $f(\ell) = \ell$. En déduire que $\ell = \alpha$.