DM9

Devoir maison à rendre le 11/03/16

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation :

$$P(X^2-1) = P(X-1)P(X+1) \qquad (*)$$

1. Montrer que, si a est racine de P alors $(a+1)^2-1$ et $(a-1)^2-1$ sont aussi des racines de P.
2. Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geq 0}$ en posant pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.
   (a) Vérifier que lorsque a_0 est une racine de P, alors a_n est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que, lorsque a_0 est un réel strictement positif, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante de réels strictement positifs.
   (c) En déduire que P n'admet pas de racine réelle strictement positive.
   (d) Montrer que -1 n'est pas racine de P.
   (e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$.
3. Déduire des questions précédentes que, si a est une racine complexe de P, alors $|a+1| = 1$. On admettra que l'on a aussi $|a-1| = 1$.
4. Montrer que si le degré de P est strictement supérieur à 0 alors P a pour unique racine 0.
5. Déterminer alors tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient la relation $(*)$.

Exercice 2

1. Résultat préliminaire : Soit (x_n) et (y_n) deux suites de réels strictement positifs.
   Montrer que si $x_n \sim y_n$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} l \in \left(\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\right) \cup \{+\infty\}$ alors :
   $$\ln(x_n) \sim \ln(y_n)$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation :
   $$x + e^x = n \qquad (E_n)$$
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) En déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et justifier que $x_n = o(e^{x_n})$.
   (d) Justifier que $e^{x_n} \sim n$ et en déduire un équivalent de x_n.
   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - \ln(n)$.
      i. En utilisant (E_n), Montrer que $e^{y_n} = 1 - \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.
      ii. Déterminer la limite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire un équivalent de $e^{y_n} - 1$.
      iii. A l'aide des questions précédentes, montrer que :
      $$x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$
