DM8

Correction du devoir maison

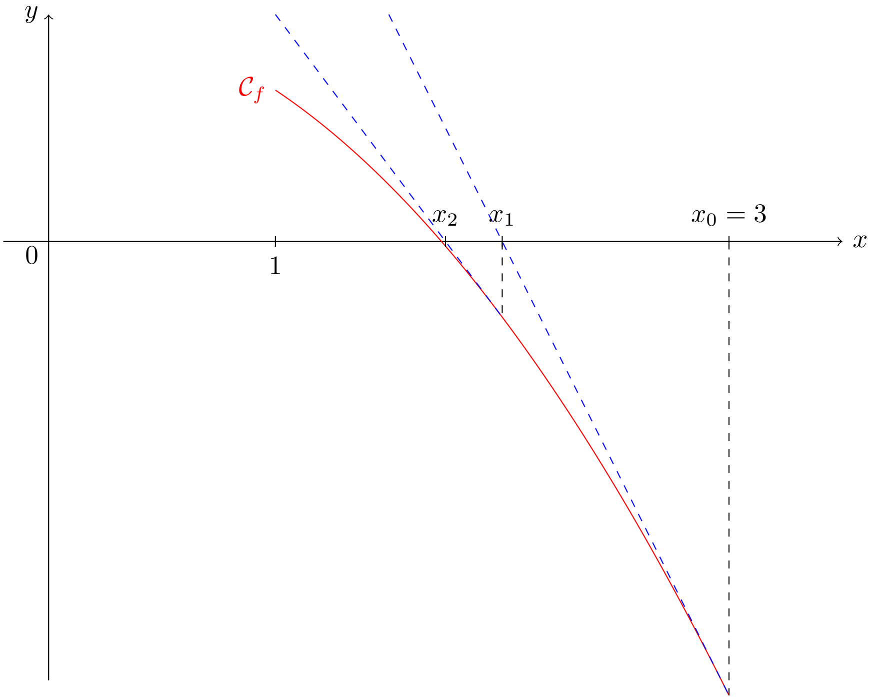
Exercice 1 (Méthode de Newton)

Partie I. Principe de la méthode de Newton.

1. On sait que f est continue sur $[a,b]$ et $0 \in]f(b), f(a)[$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) une solution à l'équation $f(x) = 0$ dans $]a,b[$. De plus, f' est strictement négative donc f est strictement monotone donc f est injective et l'équation $f(x) = 0$ ne peut avoir plus d'une solution. Finalement, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans $]a,b[$ que l'on note α.

2. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $(x_0, f(x_0))$ est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Ainsi, l'abscisse x_1 du point d'intersection de l'axe abscisse et de cette tangente vérifie l'équation : $0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$. D'où $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ car $f'(x_0)$ est non nul.

3. **Exemple.**



Partie II. Étude de la fonction g.

1. f et f' sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ car f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. Ainsi, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ en tant que différence et quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in [a,b]$, $g'(x) = 1 - \dfrac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$.
   On obtient ainsi, $g(\alpha) = \alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$ et $g'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} = 0$.

2. (a) $|f|$ et $|f''|$ sont continue sur le segment $[a,b]$ en tant que composée de fonctions continues (f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$). Ainsi, elles sont bornées et atteignent leur bornes.
   Ainsi, il existe $(c,d) \in [a,b]^2$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $|f'(c)| < |f'(x)|$ et $|f''(x)| \leq |f''(d)|$.

Comme, f' est strictement négative sur $[a,b]$, on a $|f'(c)| > 0$. Posons $m = |f'(c)|$, on a bien $m \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in [a,b]$, $|f'(x)| \geq m$.
Posons $M = 1 + |f''(d)|$, on a $M \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in [a,b]$, $|f''(x)| \leq M$.

(b) On sait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Ainsi, f' est continue sur le segment $[a,b]$ donc est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, il existe $\beta \in [a,b]$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, $|f'(t)| \leq |f'(\beta)|$. Posons $L = |f'(\beta)|$. On a $M = |f'(\beta)| > 0$ et pour tout $t \in [a,b]$, $|f'(t)| \leq M$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que f est L lipschitzienne sur $[a,b]$. Ainsi, pour tout $t \in [a,b]$, $|f(t) - f(\alpha)| \leq L|t-\alpha|$ ($\alpha \in [a,b]$). Or, $f(\alpha) = 0$. Ainsi, pour tout $t \in [a,b]$, $|f(t)| \leq L|t-\alpha|$.

(c) Soit $x \in [a,b]$. D'après la question 1., on sait que pour tout $t \in [a,b]$, $g'(t) = \dfrac{f(t)f''(t)}{f'(t)^2}$.
Ainsi, pour tout $t \in [a,b]$, $|g'(t)| = \left|\dfrac{f(t)f''(t)}{f'(t)^2}\right| \leq \dfrac{|f(t)||f''(t)|}{|f'(t)|}$. Or, on sait que pour tout $t \in [a,b]$, $|f(t)| \leq L|t-\alpha|$, $\dfrac{1}{|f'(t)|^2} \leq \dfrac{1}{m^2}$ et $|f''(t)| \leq M$, d'après les questions précédentes.
Ainsi, pour tout $t \in [a,b]$, $|g'(t)| \leq \dfrac{ML}{m^2}|t-\alpha|$.

1er cas : si $x < \alpha$
Alors, pour tout $t \in [x,\alpha]$, on a $|t-\alpha| \leq |x-\alpha|$ d'où pour tout $t \in [x,\alpha]$, $|g'(t)| \leq \dfrac{ML}{m^2}|x-\alpha|$.
D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à g sur $[x,\alpha]$, on obtient : $|g(x) - g(\alpha)| \leq \dfrac{ML}{m^2}|x-\alpha| \times (\alpha - x)$. Or, $g(\alpha) = \alpha$ donc l'inégalité se réécrit :

$$|g(x) - \alpha| \leq \frac{ML}{m^2}|x-\alpha|^2$$

2ème cas : si $x > \alpha$
On procède de même, on obtient pour tout $t \in [\alpha, x]$, $|g'(t)| \leq \dfrac{ML}{m^2}|x-\alpha|$ puis

$$|g(x) - \alpha| \leq \frac{ML}{m^2}|x-\alpha|^2$$

L'inégalité est également vraie pour $x = \alpha$.
On a donc bien prouvé que : $|g(x) - \alpha| \leq \dfrac{ML}{m^2}|x-\alpha|^2$.

(d) En posant $K = \dfrac{ML}{m^2} > 0$. On a d'après la question précédente que pour tout $x \in [a,b]$, $|g(x) - \alpha| \leq K|x-\alpha|^2$ ce que l'on souhaitait prouver.

Partie III. Étude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. (a) g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et pour tout $x \in [a,b]$, $g'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$.
De plus, f' est strictement négative. Ainsi, f est strictement décroissante sur $[a,b]$. De plus, $f(\alpha) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in [a,\alpha[$, $f(x) > 0$ et pour tout $x \in]\alpha,b]$, $f(x) < 0$. Comme on suppose ici que f'' est strictement positive, on obtient que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in [a,\alpha[$ et $g'(x) < 0$ pour tout $x \in]\alpha,b]$. Ainsi, g est strictement croissante sur $[a,\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha,b]$.

(b) **Rédaction 1 :**
On sait que g est continue et strictement croissante sur $[a,\alpha]$. Ainsi, $g([a,\alpha]) = [g(a), g(\alpha)] = [g(a), \alpha]$. Or, $g(a) = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$ et $f(a) > 0$, $f'(a) < 0$. Ainsi, $\dfrac{f(a)}{f'(a)} < 0$ d'où $g(a) > a$. Ainsi, $g([a,\alpha]) \subset [a,\alpha]$.
On peut donc conclure que $[a,\alpha]$ est stable par g et $x_0 \in [a,\alpha]$. Ainsi, (x_n) est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a,\alpha]$.

Rédaction 2 :
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini et que $x_n \in [a, \alpha]$.
La propriété est vraie par hypothèse pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que x_n existe et que $x_n \in [a, \alpha]$. Alors, $[a, \alpha] \subset [a, b]$ sur lequel g est définie. Ainsi, $g(x_n)$ donc x_{n+1} existe. $a \leq x_n \leq \alpha$ et g croissante sur $[a, \alpha]$ donc $g(a) \leq x_{n+1} \leq g(\alpha)$. Or, $g(a) = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$ et $f(a) > 0$, $f'(a) < 0$. Ainsi, $\dfrac{f(a)}{f'(a)} < 0$ d'où $g(a) > a$ et on a aussi que $g(\alpha) = \alpha$. Ainsi, $a \leq x_{n+1} \leq \alpha$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini et $x_n \in [a, \alpha]$.

Montrons finalement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{n+1}$.
Pour $n = 0$: on sait que $x_1 = g(a) > a$. Ainsi, $x_1 > x_0$. La propriété est donc vérifiée.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n < x_{n+1}$.
Comme $(x_n, x_{n+1}) \in [a, \alpha]^2$ et que g est strictement croissante sur $[a, \alpha]$, on en déduit que $g(x_n) < g(x_{n+1})$ d'où $x_{n+1} < x_{n+2}$.
Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$.
On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$.
Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante.

(c) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par α donc converge d'après le théorème de la limite monotone. Notons l sa limite. On a $l \in [a, \alpha]$ (passage à la limite dans les inégalités). Or, g est continue sur $[a, \alpha]$. Ainsi, l est un point fixe de g appartenant à $[a, \alpha]$. Or,

$$\begin{aligned} g(l) = l \quad &\iff \quad l - \frac{f(l)}{f'(l)} = l \\ &\iff \quad f(l) = 0 \end{aligned}$$

D'après la question 1, l'équation $f(x) = x$ admet un unique point fixe dans $]a, b[$ qui est α et $f(a) < 0$. Ainsi, $l = \alpha$.

2. Cas général.

(a) On sait que $\alpha \in]a, b[$. Ainsi, il existe $\eta > 0$ tel que $[\alpha - \eta, \alpha + \eta] \subset [a, b]$. En posant, $h = \min(\eta, \dfrac{1}{K + 1})$, on aura : $h > 0$, $[\alpha - \eta, \alpha + \eta] \subset [a, b]$ et $h \leq \dfrac{1}{K + 1} < \dfrac{1}{K}$.

(b) D'après la question II.2, on sait que pour tout $x \in [a, b]$, $|g(x) - \alpha| \leq K|x - \alpha|^2$.
Ainsi, pour tout $x \in I$, on a $x \in [a, b]$ donc $|g(x) - \alpha| \leq K|x - \alpha|^2$. De plus, pour tout $x \in I$, $|x - \alpha| \leq h$. Ainsi, pour tout $x \in I$, $|g(x) - \alpha| \leq Kh \times h$. Or, $Kh < 1$. Ainsi, pour tout $x \in I$, $|g(x) - \alpha| < h$ donc $g(x) \in]\alpha - h, \alpha + h[\subset I$.
On a donc montré que I est stable par g. Si de plus, $x_0 \in I$, on peut en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n existe et $x_n \in I$.

(c) Montrons que par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{K}\Big(K|x_0 - \alpha|\Big)^{2^n}$.
Pour $n = 0$: $\dfrac{1}{K}\left(K|x_0 - \alpha|\right)^{2^0} = \dfrac{1}{K}\left(K|x_0 - \alpha|\right) = |x_0 - \alpha|$. Ainsi, la propriété est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{K}\Big(K|x_0 - \alpha|\Big)^{2^n}$.
On sait alors que $x_{n+1} \in I \subset [a, b]$. Ainsi, d'après la question II.2, on a :

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| &\leq K|x_n - \alpha|^2 \\ &\underset{HR}{\leq} K\left[\frac{1}{K}\Big(K|x_0 - \alpha|\Big)^{2^n}\right]^2 \\ &\leq K \times \frac{1}{K^2}\Big(K|x_0 - \alpha|\Big)^{2^n \times 2} \\ &\leq \frac{1}{K}\Big(K|x_0 - \alpha|\Big)^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.
On a donc bien prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{K}\Big(K|x_0-\alpha|\Big)^{2^n}$.

(d) Par hypothèse, on sait que $x_0 \in I$. Ainsi, $|x_0-\alpha| \leq h$ et $K|x_0-\alpha| \leq Kh$. On obtient ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{K}(Kh)^{2^n}$$

Or, $0 < Kh < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (Kh)^{2^n} = \lim\limits_{N\to+\infty} (Kh)^N = 0$. Ainsi, par majoration, on obtient que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

3. **Exemple.**

(a) $f(x) = 3 - x^2$. Ainsi, f est bien $\mathcal{C}^2$ sur $[1,3]$, $f(1) = 2 > 0$, $f(3) = -6 < 0$ et pour tout $x \in [1,3]$, $f'(x) = -2x < 0$. On est bien dans le cadre d'application de nos résultats précédents.
De plus, pour $x \in [1,3]$, $f(x) = 0 \iff x = \sqrt{3}$. Ainsi, ici $\alpha = \sqrt{3}$. Or, pour tout $x \in [1,3]$, $|f'(x)| = 2x \in [2,6]$. Ainsi, $m = 2$ et $L = 6$ conviennent.
De plus, pour tout $x \in [1,3]$, $|f''(x)| = 2$. Ainsi, $M = 2$ convient.
On peut donc poser $K = \dfrac{ML}{m^2} = \dfrac{2\times 6}{2^2} = 3$.
On remarque que $1.7^2 = 2.89$ et $2^2 = 4$. Ainsi, $1.7^2 < 3 < 4$. Comme la racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on obtient : $1.7 < \sqrt{3} < 2$.
Posons $\delta = 0.3$. On a $K\delta = 3 \times 0.3 = 0.9 < 1$. De plus,

$$\begin{aligned} & 1 \leq \sqrt{3} - 0.3 \leq \sqrt{3} + 0.3 \leq 3 \\ \iff\ & 1 + 0.3 < \sqrt{3} < 3 - 0.3 \\ \iff\ & 1.3 < \sqrt{3} < 2.7 \end{aligned}$$

Or, $1.3 < 1.7 < \sqrt{3} < 2 < 2.7$. Ainsi, par équivalence, on a : $1 \leq \sqrt{3} - 0.3 \leq \sqrt{3} + 0.3 \leq 3$ d'où $[\sqrt{3}-\delta, \sqrt{3}+\delta] \subset [1,3]$.
Ainsi, δ vérifie bien les conditions de la question III.2.(a) On peut donc choisir $h = \delta = 0.3$.

(b) On a :

$$\sqrt{3} - 0.3 \leq 2 \leq \sqrt{3} + 0.3 \iff 1.7 \leq \sqrt{3} \leq 2.3$$

Or, on a prouvé à la question précédente que $1.7 < \sqrt{3} < 2$. Ainsi, on a bien $1.7 \leq \sqrt{3} \leq 2.3$ donc par équivalence, $2 \in [\sqrt{3}-h, \sqrt{3}+h]$.
Ainsi, d'après la question III.2.b, on peut conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini.

(c) En utilisant la question III.2.c, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{3}\Big(3 \times |2-\sqrt{3}|\Big)^{2^n}$$

Or, $2 \in [\sqrt{3}-h, \sqrt{3}+h]$, ainsi, $|2-\sqrt{3}| \leq h = 0.3$.
On obtient donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \sqrt{3}| \leq \dfrac{1}{3}\Big(3\times 0.3\Big)^{2^n} = \dfrac{1}{3}(0.9)^{2^n}$.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|x_n - \sqrt{3}| \leq \dfrac{1}{3}\Big(0,9\Big)^{2^n}$.

(e) Afin d'obtenir une approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-100} près, il suffit de calculer x_{N_1} avec $N_1 \in \mathbb{N}$

tel que $\frac{1}{3}(0.9)^{2^{N_1}} \leq 10^{-100}$. Or,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}(0.9)^{2^{N_1}} \leq 10^{-100} \quad &\iff \quad (0.9)^{2^{N_1}} \leq 3 \times 10^{-100} \iff \quad 2^{N_1}\ln(0.9) \leq \ln(3\times 10^{-100}) \\
&\iff \quad 2^{N_1} \geq \frac{\ln(3\times 10^{-100})}{\ln(0.9)} \\
&\iff \quad N_1 \ln(2) \geq \ln\left(\frac{\ln(3\times 10^{-100})}{\ln(0.9)}\right) \\
&\iff \quad N_1 \geq \frac{\ln\left(\frac{\ln(3\times 10^{-100})}{\ln(0.9)}\right)}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

On pose $N_1 = \left\lfloor \frac{\ln\left(\frac{\ln(3\times 10^{-100})}{\ln(0.9)}\right)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$.

En effectuant $N_1 = 12$ itérations, on aura bien une approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-100} près.

(f) Si l'on effectue la méthode de dichotomie sur le segment $[1,3]$, on crée deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\sqrt{3}$. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n - \sqrt{3}| \leq \frac{3-1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Afin de calculer une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-100} près, il suffit de calculer a_{N_2} avec $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{N_2-1}} \leq 10^{-100}$. Or,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{N_2-1}} \leq 10^{-100} \quad &\iff -(N_2-1)\ln(2) \leq -100\ln(10) \\
&\iff (N_2-1) \geq \frac{100\ln(10)}{\ln(2)} \\
&\iff N_2 \geq \frac{100\ln(10)}{\ln(2)} + 1
\end{aligned}$$

On pose $N_2 = \left\lfloor \frac{100\ln(10)}{\ln(2)} + 1 \right\rfloor + 1$.

En effectuant $N_2 = 334$ itérations, on aura bien une approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-100} près. La méthode de Newton semble donc être la plus efficace.

Exercice 2

1. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ convient.

   En effet, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(xf(y)) = f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y}{x}$ et $yf(x) = \frac{y}{x}$.

2. Soit f une application qui vérifie les conditions $(**)$.

   (a) Soit $x \in]0,+\infty[$. Si on pose $x_1 = xf(x)$ alors $f(x_1) = f(xf(x)) = xf(x) = x_1$ grâce à la relation $(**)$ évaluée pour $y = x$.
   Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_1^{2^n}) = x_1^{2^n}$.
   Pour $n = 0$, $f(x_1^{2^0}) = f(x_1^1) = f(x_1) = x_1 = x_1^1 = x_1^{2^0}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(x_1^{2^n}) = x_1^{2^n}$.
   Alors, $f\left(x_1^{2^{n+1}}\right) = f(x_1^{2^n} \times x_1^{2^n}) \underset{HR}{=} f\left(x_1^{2^n} \times f\left(x_1^{2^n}\right)\right) = x_1^{2^n} f\left(x_1^{2^n}\right)$ (on a pris $x = y = x_1^{2^n} > 0$ dans $(**)$).

Ainsi, $f\left(x_1^{2^{n+1}}\right) \underset{HR}{=} x_1^{2^n} \times x_1^{2^n} = x_1^{2^{n+1}}$ ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(x_1^{2^n}\right) = x_1^{2^n}$.
Si $x_1 > 1$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_1^{2^n} = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} x_1^N = +\infty$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_1^{2^n}\right) = 0$ ce qui est impossible car on doit aussi avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_1^{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_1^{2^n} = +\infty$.
Ainsi, on ne peut pas avoir $x_1 > 1$.

(b) Supposons $x_1 < 1$.
On a pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(xf(y)) = yf(x)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on prend $x = \dfrac{1}{x_1^{2^n}}$ et $y = x_1^{2^n}$, on a alors :

$$f\left(\frac{1}{x_1^{2^n}} f\left(x_1^{2^n}\right)\right) = x_1^{2^n} f\left(\frac{1}{x_1^{2^n}}\right)$$

Or, on sait que $f\left(x_1^{2^n}\right) = x_1^{2^n}$. Ainsi, on obtient :

$$f(1) = x_1^{2^n} f\left(\frac{1}{x_1^{2^n}}\right)$$

Or, $x_1 > 0$ d'où :

$$f\left(\frac{1}{x_1^{2^n}}\right) = \frac{f(1)}{x_1^{2^n}}$$

On a $0 < x_1 < 1$ donc $\dfrac{1}{x_1} > 1$ ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x_1}\right)^{2^n} = \lim\limits_{N\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x_1}\right)^N = +\infty$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{x_1^{2^n}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_1^{2^n} = 0^+$ car $0 < x_1 < 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_1^{2^n}} f(1) = +\infty$ car $f(1) > 0$.
Ce qui est impossible car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{1}{x_1^{2^n}}\right) = \dfrac{1}{x_1^{2^n}} f(1)$.

(c) D'après les questions précédentes, on peut conclure que $x_1 = 1$ c'est à dire $xf(x) = 1$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
On a donc montré que la seule solution au problème est l'application : $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$
