DM6

Correction du devoir maison

Exercice 1

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1+x \geq 0$ donc $f(x) \geq 0$. Ainsi, $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+$ est stable par f. De plus, $u_0 \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, la suite (u_n) est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$.

2. Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors, $l \geq 0$, par passage à la limite dans les inégalités. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $f(l) = l$ par caractérisation séquentielle de la limite. Or, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$. l donc solution dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $f(l) = l$.

$$\begin{aligned} f(l) = l &\iff l^2 + l - 1 = 0 \\ &\iff l = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

   Or, $l \in \mathbb{R}_+$, ainsi, la seule limite finie possible pour (u_n) est $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

3. On suppose dans cette question $u_0 \in [0, \alpha]$.

   - f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
     De plus, $f(0) = 1$, $f(\alpha) = \alpha$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$ et $\alpha < \dfrac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	α	1
$f(x)$	1	α	$\frac{1}{2}$

     Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons : $\mathcal{P}(n) : \Big(u_{2n} \in [0, \alpha] \quad \text{et} \quad u_{2n+1} \in [\alpha, 1]\Big)$.
     Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
     $u_0 \in [0, \alpha]$ et $u_1 = f(u_0)$. Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $f(0) \geq u_1 \geq f(\alpha)$ donc $1 \geq u_1 \geq \alpha$ et $u_1 \in [\alpha, 1]$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
     Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Ainsi, $u_{2n+1} \in [\alpha, 1]$ et $u_{2n+2} = f(u_{2n+1})$. En utilisant la décroissance de f, on obtient : $f(\alpha) \geq f(u_{2n+1}) \geq f(1)$ donc $\dfrac{1}{2} \leq u_{2n+2} \leq \alpha$. Ainsi, $u_{2n+2} \in [0, \alpha]$. Puis, comme f est décroissante, $f(0) \geq f(u_{2n+2}) \geq f(\alpha)$ donc $1 \geq u_{2n+3} \geq \alpha$. Ainsi, $u_{2n+3} \in [\alpha, 1]$. On a donc prouvé que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
     Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [0, \alpha]$ et $u_{2n+1} \in [\alpha, 1]$.

   - f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+$ stable par f. Ainsi, $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ en tant que composée de deux fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}_+$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$. Ainsi, (u_{2n}) est monotone.
     De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f \circ f(x) - x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} - x = \frac{1+x}{2+x} - x = \frac{1 + x - 2x - x^2}{2+x} = \frac{-x^2 - x + 1}{2+x} = -\frac{x^2 + x - 1}{2+x}.$$

     Or, d'après la question 2, les racines de $-(x^2 + x - 1)$ sont α et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Ainsi,

x	0		α		1
$2+x$		$+$		$+$	
$-(x^2+x-2)$		$+$	0	$-$	

Ainsi, pour tout $x \in [0,\alpha]$, $f \circ f(x) - x \geq 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [0,\alpha]$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \circ f(u_{2n}) - u_{2n} \geq 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} \geq u_{2n}$. Ainsi, (u_{2n}) est croissante.

- (u_{2n}) est croissante et majorée par α (question 4.a) donc (u_{2n}) est convergente (théorème de la limite monotone). Notons l_1 sa limite. Par passage à la limite dans les inégalités, on sait déjà que $l_1 \in [0,\alpha]$.
Comme (u_{2n}) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} \geq u_{2n}$. Or f est décroissante. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n})$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$. Ainsi (u_{2n+1}) est décroissante. De plus, elle est minorée par α (question 4a). Ainsi, (u_{2n+1}) est convergente. Notons l_2 sa limite. Par passage à la limite dans les inégalités, on sait déjà que $l_2 \in [\alpha, 1]$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$.
Or, $f \circ f$ est continue sur $[0,1]$, l_1 et l_2 sont deux points fixes de $f \circ f$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$f \circ f(x) = x \iff x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ car } x \geq 0$$
Ainsi, le seul point fixe positif de $f \circ f$ est α.
On en déduit donc que $l_1 = l_2 = \alpha$.
Comme (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et convergent vers la même limite α, on en déduit que (u_n) est elle même convergente vers α.
- Si $u_0 > \alpha$ alors, comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $f(u_0) < f(\alpha) = \alpha$. De plus, comme $\mathbb{R}_+$ est stable par f, on en déduit donc que $f(u_0) \geq 0$. Ainsi, $u_1 \in [0,\alpha]$. On est donc ramené au cas précédente. Comme la convergence d'une suite ne dépend que du comportement de celle-ci à partir d'un certain rang, on déduit du cas précédent que si $u_0 \geq \alpha$, (u_n) converge vers α.

Exercice 2

Soient n et p deux entiers non nuls. Le but de cet exercice est de calculer le nombre d'applications de $[|1,n|]$ dans $[|1,p|]$ surjectives. On note $S_{n,p}$ ce nombre.

1. - Une application de $[|1,n|]$ dans $[|1,n|]$ est surjective si et seulement si elle est bijective. $S_{n,n}$ est donc le nombre de permutations de $[|1,n|]$. Ainsi $S_{n,n} = n!$.
   - Il n'y a qu'une fonction de $[|1,n|]$ dans $[|1,1|]$ (la fonction constante 1) et elle est surjective. Ainsi $S_{n,1} = 1$.
   - Il y a 2^n fonctions de $[|1,n|]$ dans $[|1,2|]$. Une telle fonction est surjective si et seulement si elle est non constante. Comme il y a deux fonctions constantes (la constante 1 et la constante 2), $S_{n,2} = 2^n - 2$.
2. Si $p > n$, il ne peut y avoir de surjection de $[|1,n|]$ dans $[|1,p|]$. Ainsi $S_{n,p} = 0$.
3. Si $k = p$:
$$\sum_{q=k}^{p} (-1)^q \binom{p}{q}\binom{q}{k} = \sum_{q=p}^{p} (-1)^p \binom{p}{q}\binom{q}{p} = (-1)^p \binom{p}{p}\binom{p}{p} = (-1)^p.$$

Soit $k \in [|0, p-1|]$

$$\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \sum_{q=k}^{p}(-1)^q\frac{p!}{q!(p-q)!}\frac{q!}{k!(q-k)!} = \sum_{q=k}^{p}(-1)^q\frac{p!}{(p-q)!k!(q-k)!}$$
$$= \frac{p!}{k!}\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\frac{1}{(p-q)!(q-k)!}$$

Effectuons le changement de variable $j = q-k$.

$$\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \frac{p!}{k!}\sum_{j=0}^{p-k}(-1)^{j+k}\frac{1}{(p-k-j)!j!} = \frac{p!}{k!(p-k)!}\sum_{j=0}^{p-k}(-1)^{j+k}\frac{(p-k)!}{(p-k-j)!j!}$$
$$= (-1)^k\binom{p}{k}\sum_{j=0}^{p-k}(-1)^j\binom{p-k}{j} = (-1)^k\binom{p}{k}(1-1)^{p-k} = 0$$

puisque $k < p$, et par le binôme de Newton.

4. (a) Soit $(q,q') \in [|0,p|]^2$ tel que $q \neq q'$, $\mathcal{S}_q \cap \mathcal{S}_{q'} = \emptyset$: en effet, si on avait $f \in \mathcal{S}_q \cap \mathcal{S}_{q'}$, on aurait $q = Card(f([|1,n|])) = q'$... exclus ! Les $\mathcal{S}_q$ sont donc deux à deux disjoints.
Comme pour tout $q \in [|0,p|]$, $\mathcal{S}_q \subset \mathcal{F}([|1,n|],[|1,p|])$, on a $\bigcup\limits_{q=0}^{p}\mathcal{S}_q \subset \mathcal{F}([|1,n|],[|1,p|])$.
Réciproquement. Soit $f \in \mathcal{F}([|1,n|],[|1,p|])$, on pose $q = Card(f([|1,n|]))$. Comme $f([|1,n|])$ est un sous-ensemble de $[|1,p|]$, $q \in [|0,p|]$ et $f \in \bigcup\limits_{q=0}^{p}\mathcal{S}_q$. Ainsi $\mathcal{F}([|1,n|],[|1,p|]) \subset \bigcup\limits_{q=0}^{p}\mathcal{S}_q$ et $\bigcup\limits_{q=0}^{p}\mathcal{S}_q = \mathcal{F}([|1,n|],[|1,p|])$.

(b) Pour dénombrer le nombre de fonctions dans $\mathcal{S}_q$, on a :
- $\binom{p}{q}$ choix pour l'ensemble $f([|1,n|])$ (qui est un sous-ensemble de $[|1,p|]$ de cardinal q);
- $S_{n,q}$ choix pour l'application f (qui doit être une surjection de $[|1,n|]$ dans l'ensemble choisi précédemment).

On a donc $Card(\mathcal{S}_q) = \binom{p}{q}S_{n,q}$.
La question précédente nous donne alors :

$$p^n = Card\left(\mathcal{F}([|1,n|],[|1,p|])\right) = \sum_{q=0}^{p}Card(\mathcal{S}_q) = \sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}S_{n,q}.$$

5. On a montré que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p^n = \sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}S_{n,q}$.
Si $p=0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p^n = 0$ et $\sum_{q=0}^{0}\binom{0}{q}S_{n,q} = \binom{0}{0}S_{n,0} = 0$.
Ainsi, la formule est encore valable pour $p=0$. En appliquant la question précédente à tous les $k \in [|0,p|]$, il vient :

$$(-1)^p\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n = (-1)^p\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\sum_{q=0}^{k}\binom{k}{q}S_{n,q} = \sum_{k=0}^{p}\sum_{q=0}^{k}(-1)^{p+k}\binom{p}{k}\binom{k}{q}S_{n,q}$$
$$= \sum_{q=0}^{p}\sum_{k=q}^{p}(-1)^{p+k}\binom{p}{k}\binom{k}{q}S_{n,q} = \sum_{q=0}^{p}S_{n,q}(-1)^p\sum_{k=q}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q}$$
$$= S_{n,p}(-1)^p\sum_{k=p}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q} = S_{n,p}$$

puisque d'après la question 4, $\sum\limits_{k=q}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q} = 0$ si $k \in [|0,p-1|]$.

6. En appliquant la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned}
& p(S_{n-1,p}+S_{n-1,p-1}) \\
&= p(-1)^p\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^{n-1}+p(-1)^{p-1}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\binom{p-1}{k}k^{n-1} \\
&= p(-1)^{2p}\binom{p}{p}p^{n-1}+(-1)^p p\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k k^{n-1}\left(\binom{p}{k}-\binom{p-1}{k}\right) \\
&= p^n+(-1)^p p\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k k^{n-1}\left(\frac{p!}{k!(p-k)!}-\frac{(p-1)!}{k!(p-k-1)!}\right) \\
&= p^n+(-1)^p p\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k k^{n-1}\times\frac{p!-(p-k)(p-1)!}{k!(p-k)!} = p^n+(-1)^p\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k k^{n-1}\times\frac{p\times(p-1)!\times k}{k!(p-k)!} \\
&= p^n+(-1)^p\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k k^n\binom{p}{k} = (-1)^p\sum_{k=0}^{p}(-1)^k k^n\binom{p}{k} = S_{n,p}
\end{aligned}$$

7. On connaît les valeurs de $S_{n,p}$ pour $p=1$ et pour $p=n$ par la question 1. On peut donc construire les deux côtés du triangle donnant les $S_{n,p}$ pour tous les $1\le p\le n$. On remplit ensuite le triangle en prenant, pour calculer la case (n,p), p fois la somme de la case $(n-1,p)$ avec la case $(n-1,p-1)$.

8. On trouve :

$n\backslash p$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	2				
3	1	6	6			
4	1	14	36	24		
5	1	30	150	240	120	
6	1	62	540	1560	1800	720

9. (a) f n'est pas injective puisque $p+1>p$. On a donc $a\neq b\in[|1,p+1|]$ tel que $f(a)=f(b)$. On pose alors $\begin{array}{rccc}\tilde{f}: & [|1,p+1|]\setminus\{a\} & \to & [|1,p|] \\ & x & \mapsto & f(x)\end{array}$. $\tilde{f}$ est encore surjective : si $y\in[|1,p|]$, on a $x\in[|1,p+1|]$ tel que $f(x)=y$. Si $x=a$ on change x en b, de sorte que $x\in[|1,p+1|]\setminus\{a\}$ et $y=f(x)=\tilde{f}(x)$.
   Comme $\tilde{f}$ va d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à p éléments, elle est donc bijective.

   (b) D'après la question précédente, choisir une surjection de $[|1,p+1|]$ dans $[|1,p|]$ revient à choisir un sous-ensemble $\{a,b\}$ de $[|1,p+1|]$ ($\binom{p+1}{2}$ choix) puis une bijection de $[|1,p+1|]\setminus\{a\}$ dans $[|1,p|]$ ($p!$ choix). On a donc $\binom{p+1}{2}p!$ possibilités puis $S_{p+1,p}=p!\binom{p+1}{2}$.
