DM4

Correction du devoir maison

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

1. $\forall x \in J,\ x, 1-x \neq 0$. Ainsi, (E_J) est équivalente sur J à $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x(1-x)}$.

   La solution générale sur J de l'équation homogène associée à (E_j) est $x \to \lambda e^{-\ln(|x|)} = \dfrac{\lambda}{|x|}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $0 \notin J$, x ne change pas de signe sur J, donc, quitte à changer λ en $-\lambda$, la solution générale sur J de l'équation homogène associée à (E_J) est :

   $$y : x \mapsto\to \frac{\lambda}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de (E_J) sur J sous la forme : $x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{x}$ avec λ de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. En remplaçant dans (E_J), on obtient alors :

   $$\forall x \in J,\ \lambda'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

   On peut donc prendre : $\lambda : x \in J \mapsto -\ln(|1-x|) = -\ln(1-x)$ car $J \subset]-\infty, 0[\cup]0,1[$.
   Ainsi, la fonction $x \in J \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$ est une solution particulière de (E_J). L'ensemble des solutions sur J de (E_J) est donc : $\left\{x \in J \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{\lambda}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

3. y est solution de (F_J) sur J si et seulement si y' est solution de (E_J) sur J si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y' : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{\lambda}{x} \end{array}$ si et seulement si il existe $(\lambda, C) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in J$,
   $y(x) = -\displaystyle\int \left[\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\lambda}{x}\right] dx + C$ si et seulement si il existe $(\lambda, C) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in J$,
   $y(x) = -\displaystyle\int \frac{\ln(1-x)}{x} dx + \lambda \ln|x| + C$

4. Soit f une solution de $(E) = (E_{]-\infty,1[})$. y est donc solution de (E) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0,1[$. Ainsi, il existe (λ_1, λ_2) tel que :

   $$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{\lambda_1}{x} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{\lambda_2}{x} & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

   En prenant $x = 0$ dans (E), on obtient $f(0) = 1$. Ainsi, f est définie par :

   $$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{\lambda_1}{x} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 & \text{si } x = 0 \\ -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{\lambda_2}{x} & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

   La fonction f doit être continue et dérivable en 0.

On étudie sa continuité en 0. On a $\lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} = 1$, en utilisant le taux d'accroissement. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{\lambda_1}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda_1 < 0 \\ 1 & \text{si } \lambda_1 = 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda_1 > 0 \end{cases}$. Ainsi, nécessairement $\lambda_1 = 0$. De la même manière, on obtient que nécessairement $\lambda_2 = 0$. On a alors : $\lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} = 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$. Donc la fonction f est bien continue en 0, et donc sur $]-\infty, 1[$.

On étudie sa dérivabilité à présent : la fonction f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$. Etudions la dérivabilité en 0 :

$$\forall x \in]-\infty, 1[\setminus\{0\},\ \frac{-\dfrac{\ln(1-x)}{x} - 1}{x} = -\frac{\ln(1-x)}{x^2} - \frac{1}{x}$$

On souhaite calculer $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2}\right)$.

Vous pourrez déterminer rapidement ces limites à l'aide d'un développement limité (ce que nous verrons un peu plus tard dans l'année). Montrons que ces deux limites valent $\dfrac{1}{2}$. Pour ce faire, posons : $g(x) = \ln(1-x) + x + \dfrac{1}{2}x^2 - x^3$ et $h(x) = \ln(1-x) + x + \dfrac{1}{2}x^2 + x^3$. g et h sont dérivables sur $]-1, 1[$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$g'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 + x - 3x^2 = \frac{-4x^2 + 3x^3}{1-x} = \frac{x^2(-4+3x)}{1-x} < 0$$
$$h'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 + x + 3x^2 = \frac{2x^2 - 3x^3}{1-x} = \frac{x^2(2-3x)}{1-x}$$

Ainsi, g est décroissante sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et h est croissante sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. De plus, $h(0) = g(0) = 0$. On trouve donc :

$$\forall x \in]-\frac{1}{2}, 0[,\ g(x) \geq g(0) = 0 \text{ et } h(x) \leq h(0) = 0$$
$$\forall x \in]0, \frac{1}{2}[,\ g(x) \leq g(0) = 0 \text{ et } h(x) \geq h(0) = 0$$

D'où :

$$\forall x \in]-\frac{1}{2}, 0[,\ \ln(1-x) + x \geq x^3 - \frac{1}{2}x^2 \text{ et } \ln(1-x) + x \leq -x^3 - \frac{1}{2}x^2$$
$$\forall x \in]0, \frac{1}{2}[,\ \ln(1-x) + x \leq x^3 - \frac{1}{2}x^2 \text{ et } \ln(1-x) + x \geq -x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

Finalement, on obtient :

$$\forall x \in]-\frac{1}{2}, 0[,\ x^3 - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1-x) + x \leq -x^3 - \frac{1}{2}x^2 \text{ soit } x - \frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1-x)+x}{x^2} \leq -x - \frac{1}{2} \text{ car } x^2 > 0$$
$$\forall x \in]0, \frac{1}{2}[,\ -x^3 - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1-x) + x \leq x^3 - \frac{1}{2}x^2 \text{ soit } -x - \frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1-x)+x}{x^2} \leq x - \frac{1}{2} \text{ car } x^2 > 0$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(-x - \dfrac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$. Ainsi, par théorème d'encadrement, on obtient que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$, d'où, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

La fonction f définie plus haut est donc dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Il existe donc une unique solution de (E) sur $]-\infty,1[$ qui est la fonction f définie sur $]-\infty,1[$ par :

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x\in]-\infty,0[\\ 1 & \text{si } x=0 \\ -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x\in]0,1[\end{cases}$$

Exercice 2

On cherche à résoudre sur $I=]-1,1[$ l'équation :

$$(x^2-1)y''+3xy'-8y=2x. \tag{E}$$

1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur I.

   On pose $J=]0,\pi[$ et :

   $$z:\begin{array}{l} J\to\mathbb{R} \\ t\mapsto \sin(t)\cdot y(\cos(t)). \end{array}$$

   (a) Par hypothèse, y est deux fois dérivable sur $I=]-1,1[$. De plus, les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $J=]0,\pi[$, et la fonction cosinus restreinte à $]0,\pi[$ est à valeurs dans $]-1,1[$. Par composition et produit de fonctions dérivables, on en déduit que z est deux fois dérivable sur J. On calcule pour tout $t\in J$:

   $$\begin{aligned} z'(t)&=\cos(t)\cdot y(\cos(t))+\sin(t)(-\sin(t))y'(\cos(t)) \\ &=\cos(t)\cdot y(\cos(t))+(\cos^2(t)-1)y'(\cos(t)), \\ z''(t)&=-\sin(t)\cdot y(\cos(t))-\cos(t)\sin(t)y'(\cos(t))-2\sin(t)\cos(t)y'(\cos(t)) \\ &\quad-(\cos^2(t)-1)\sin(t)y''(\cos(t)) \\ &=-\sin(t)\cdot\left(y(\cos(t))+3\cos(t)y'(\cos(t))+(\cos^2(t)-1)y''(\cos(t))\right). \end{aligned}$$

   (b) y est solution de (E) sur I si y est deux fois dérivable sur I et

   $$(x^2-1)y''+3xy'-8y=2x.$$

   Pour tout $x\in]-1,1[$, il existe un unique $t\in]0,\pi[$ tel que $x=\cos(t)$. En remplaçant dans (E), on obtient :

   $$(\cos^2(t)-1)y''(\cos(t))+3\cos(t)y'(\cos(t))-8y(\cos(t))=2\cos(t).$$

   Puisque $\sin(t)\neq 0$ pour $t\in]0,\pi[$, cette équation est équivalente à :

   $$-\sin(t)(\cos^2(t)-1)y''(\cos(t))-3\sin(t)\cos(t)y'(\cos(t))+8\sin(t)y(\cos(t))=-2\sin(t)\cos(t).$$

   En posant $z(t)=\sin(t)\cdot y(\cos(t))$, on en déduit par la question précédente que z est deux fois dérivable sur J. L'égalité précédente est alors équivalente à :

   $$z''(t)+9\sin(t)y(\cos(t))=z''(t)+9z(t)=-2\sin(t)\cos(t) \tag{E'}$$

   Finalement on a montré que

   $$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \Leftrightarrow z \text{ solution de } (E') \text{ sur } J.$$

2. L'équation (E') est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation homogène associée est

   $$z''(t)+9z(t)=0 \tag{E'_0}$$

L'équation caractéristique associée est $r^2+9=0$. Ces deux racines sont $r=3i$ et $r'=-3i$. L'ensemble des solutions de (E_0') est :

$$\{t\in J\mapsto A\cos(3t)+B\sin(3t)/A,B\in\mathbb{R}\}.$$

On cherche une solution particulière de (E'). On a :

$$z''(t)+9z(t)=-2\sin(t)\cos(t)=-\sin(2t)=\frac{e^{-2it}-e^{2it}}{2i}$$

En utilisant le principe de superposition, on se ramène à déterminer des solutions particulières des deux équations suivantes :

$$z''(t)+9z(t)=\frac{e^{-2it}}{2i}\qquad (E_1')$$

et

$$z''(t)+9z(t)=-\frac{e^{2it}}{2i}\qquad (E_2')$$

Pour (E_1'), $-2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution de (E_1') sous la forme $z(t)=Ce^{-2it}$ avec $C\in\mathbb{C}$. En remplaçant dans (E_1'), on obtient :

$$-4Ce^{-2it}+9Ce^{-2it}=\frac{e^{-2it}}{2i},$$

d'où $5C=\frac{1}{2i}$, et $C=-\dfrac{i}{10}$. Ainsi $z(t)=-\dfrac{i}{10}e^{-2it}$ est solution de (E_1') sur J.
Une solution particulière de (E_2') se déduit alors de la solution précédente en considérant $t\mapsto \overline{-\dfrac{i}{10}e^{-2it}}=\dfrac{i}{10}e^{2it}$.
Finalement, une solution particulière de (E') sur J est donnée par :

$$t\mapsto -\frac{i}{10}e^{-2it}+\frac{i}{10}e^{2it}=\frac{i}{10}(e^{2it}-e^{-2it})=-\frac{1}{5}\sin(2t).$$

L'ensemble des solutions de (E') sur J est donc

$$\left\{t\mapsto A\cos(3t)+B\sin(3t)-\frac{1}{5}\sin(2t)/A,B\in\mathbb{R}\right\}.$$

3. On obtient donc par ce qui précède que y est solution de (E) sur I si et seulement s'il existe $A,B\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $t\in J$,

$$\sin(t)y(\cos(t))=A\cos(3t)+B\sin(3t)-\frac{1}{5}\sin(2t)\qquad (*)$$

On a :

$$\begin{aligned}\cos(3t)&=\cos(2t)\cos(t)-\sin(2t)\sin(t)=\cos^3(t)-\sin^2(t)\cos(t)-2\sin^2(t)\cos(t)\\&=\cos(t)(\cos^2(t)-3\sin^2(t))=\cos(t)(4\cos^2(t)-3)\\ \sin(3t)&=\sin(2t)\cos(t)+\cos(2t)\sin(t)=2\sin(t)\cos^2(t)+\cos^2(t)\sin(t)-\sin^3(t)\\&=\sin(t)(3\cos^2(t)-\sin^2(t))=\sin(t)(4\cos^2(t)-1)\\ \frac{1}{5}\sin(2t)&=\frac{2}{5}\cos(t)\sin(t)\end{aligned}$$

D'où en remplaçant dans $(*)$, on obtient :

$$\sin(t)y(\cos(t))=A\cos(t)(4\cos^2(t)-3)+B\sin(t)(4\cos^2(t)-1)-\frac{2}{5}\cos(t)\sin(t).$$

Puisque $\sin(t) \neq 0$ pour $t \in J$, on obtient :

$$\begin{aligned} y(\cos(t)) &= A\frac{\cos(t)}{\sin(t)}(4\cos^2(t) - 3) + B(4\cos^2(t) - 1) - \frac{2}{5}\cos(t) \\ &= A\frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\cos^2(t)}}(4\cos^2(t) - 3) + B(4\cos^2(t) - 1) - \frac{2}{5}\cos(t) \end{aligned}$$

car $\sin(t) > 0$ sur J. Alors en prenant $x = \cos(t)$, on obtient finalement :

$$y(x) = A\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(4x^2 - 3) + B(4x^2 - 1) - \frac{2}{5}x.$$

Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions de la forme :

$$x \in I \mapsto A\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(4x^2 - 3) + B(4x^2 - 1) - \frac{2}{5}x,$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.
