DM2

Correction du Devoir Maison

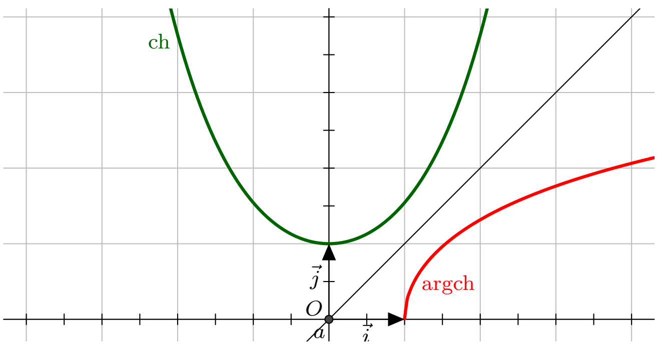
Exercice 1

1. Les variations de la fonction ch ont été étudiées en cours : on sait que ch est une fonction continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, telle que $\mathrm{ch}(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{ch}(x)=+\infty$. Donc ch réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$. On note dans la suite argch.

2. Tout d'abord, on sait que la fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier sur $[0,+\infty[$. Pour déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction argch, on résout l'équation $\mathrm{ch}'(x)=0$ pour $x\in[0,+\infty[$:
$$\mathrm{ch}'(x)=0 \Leftrightarrow sh(x)=0 \Leftrightarrow x=0.$$
La fonction argch est donc dérivable sur $[1,+\infty[\backslash\{\mathrm{ch}(0)\}\ =]1,+\infty[$. De plus, pour tout $y\in]1,+\infty[$, on a :
$$\mathrm{argch}'(y)=\frac{1}{\mathrm{ch}'(\mathrm{argch}(y))}=\frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(y))}.$$
Or on sait que $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, donc $\mathrm{sh}^2(x)=\mathrm{ch}^2(x)-1$. Ainsi :
$$|sh(x)|=\sqrt{\mathrm{ch}^2(x)-1}$$
Notez que $\mathrm{ch}^2(x)-1$ est bien positif puisque $\mathrm{ch}(x)\geq 1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Et pour $y\in]1,+\infty[$, on a $\mathrm{argch}(y)\in]0,+\infty[$ et donc $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(y))>0$. D'où
$$\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(y))=\sqrt{\mathrm{ch}^2(\mathrm{argch}(y))-1}=\sqrt{y^2-1}.$$
On obtient finalement que pour tout $y\in]1,+\infty[$:
$$\mathrm{argch}'(y)=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

3. On obtient donc le tableau de variation suivant, et la courbe représentative de argch à partir de la courbe représentative de ch $[0,+\infty[$ par symétrie par rapport à la droite $y=x$.

x	1	$+\infty$
$\mathrm{argch}'(x)$	$\Vert$	$+$
$\mathrm{argch}(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$



4. (a) On souhaite calculer argch(2). Pour cela on résout l'équation $\mathrm{ch}(x)=2$. On sait que cette équation a deux solutions : 2 a deux antécédents par la fonction ch, l'un étant positif, l'autre négatif. Puisque $\mathrm{argch}(2)>0$, on en déduite que argch(2) sera l'unique solution strictement positive de cette équation.
Pour $x\in\mathbb{R}$, on résout donc :
$$\mathrm{ch}(x)=2 \Leftrightarrow e^x+e^{-x}=4 \Leftrightarrow e^{2x}-4e^x+1=0$$

On pose $X = e^x$. On obtient donc :

$$X^2 - 4X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \pm \sqrt{3}.$$

D'où finalement $x = \ln(2+\sqrt{3})$ ou $x = \ln(2-\sqrt{3})$. Puisque $\ln(2-\sqrt{3})$, on en déduit finalement que $x = \ln(2+\sqrt{3})$, et donc :

$$\operatorname{argch}(2) = \ln(2+\sqrt{3}).$$

(b) Soit $y \in [1, +\infty[$, on résout l'équation $y = \operatorname{ch}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} y = \operatorname{ch}(x) &\Leftrightarrow 2y = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 2yX + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Or $y \geq 1$, et donc le discriminant $\Delta = 4y^2 - 4$ de ce polynôme est positif. On a donc

$$\begin{aligned} y = \operatorname{ch}(x) \Leftrightarrow &\begin{cases} X = e^x \\ X = y \pm \sqrt{y^2-1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2-1}) \text{ ou } x = \ln(y - \sqrt{y^2-1}) \end{aligned}$$

En effet on notera que $y + \sqrt{y^2-1} \geq y - \sqrt{y^2-1} > y - \sqrt{y^2} = 0$. On peut donc bien prendre le logarithme (qui est bijectif sur $\mathbb{R}_+^*$) dans la dernière équivalence.
Enfin puisque $\operatorname{argch}(y) \geq 0$ et que $\ln(y - \sqrt{y^2-1}) \leq 0$ pour $y \in [1, +\infty[$ (je vous laisse vous en convaincre), on obtient finalement que pour tout $y \in [1, +\infty[$:

$$\operatorname{argch}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}).$$

5. On sait que la fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{sh}(x) = \pm\infty$. Donc sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On la note dans la suite argsh.

   Montrons que $arsh$ est impaire : son domaine de définition est bien symétrique par rapport à 0. De plus pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ ($x = \operatorname{argsh}(y)$) tel que $\operatorname{sh}(x) = y$, et on a :

$$\operatorname{argsh}(-y) = \operatorname{argsh}(-\operatorname{sh}(x)) = \operatorname{argsh}(\operatorname{sh}(-x)) = -x = -\operatorname{argsh}(y).$$

   Donc argsh est impaire.

   Puisque la fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}'(x) = ch(x) \neq 0$, on en déduit que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$:

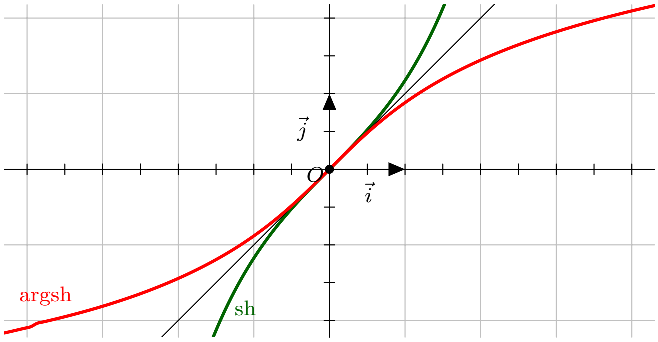
$$\operatorname{argsh}'(y) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(y))}.$$

   Puisque $\operatorname{ch}^2(x) = 1 + \operatorname{sh}^2(x)$ et que la fonction ch est toujours positive, on a $\operatorname{ch}(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(x)}$. En remplaçant dans la formule de dérivation, on obtient :

$$\operatorname{argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{argsh}(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

   On en déduit le tableau de variation de la fonction argsh et sa représentation graphique.

x	0 $\quad$ $+\infty$
$\text{argsh}'(x)$	$+$
$\text{argsh}(x)$	$0 \nearrow +\infty$



On cherche une écriture explicite de la fonction argsh. Pour cela, on résout pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'équation $y = \text{sh}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a

$$y = \text{sh}(x) \Leftrightarrow 2y = e^x - e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 2yX - 1 = 0 \end{cases}$$

Le discriminant $\Delta = 4y^2 + 4$ de ce polynôme est strictement positif. On a donc

$$y = \text{sh}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X = y \pm \sqrt{y^2+1} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$

En effet on notera que la solution $y - \sqrt{y^2+1} < 0$ est impossible puisque $e^x > 0$. Puisque de plus $y + \sqrt{y^2+1} > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, on peut donc bien prendre le logarithme (qui est bijectif sur $\mathbb{R}_+^*$) dans la dernière équivalence.

On obtient finalement que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\text{argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$

Exercice 2

On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}.$$

1. La fonction th est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas (rappelons que $\text{ch}(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Elle est de plus dérivable sur cet intervalle, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{th}'(x) = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x).$$

Puisque $\dfrac{1}{\text{ch}^2(x)} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction th est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

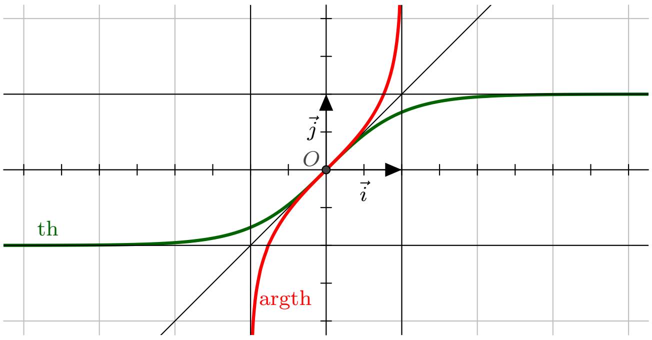
Notons que th est une fonction impaire puisque ch est paire et sh est impaire. On a donc $\text{th}(0) = 0$. On calcule la limite en $+\infty$:

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{th}(x) = 1$.

On obtient le tableau de variation suivant pour la fonction th, ainsi que sa courbe représentative.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\mathrm{th}'(x)$	$+$
$\mathrm{th}(x)$	$0 \nearrow 1$



2. (a) La fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et continue sur cet intervalle. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{x\to-\infty} tah(x), \lim_{x\to+\infty} tah(x)[=]-1,1[$. On note $\mathrm{argth} :]-1,1[\to\mathbb{R}$ sa réciproque.
On montre que argth est impaire de la même manière que pour argsh.

(b) On a vu que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x)=1-\mathrm{th}^2(x)$. On a de plus $\mathrm{th}'(x)>0$. En particulier sa dérivée ne s'annule pas. Donc argth est dérivable sur $]-1,1[$ et on a pour tout $y\in]-1,1[$:

$$\mathrm{argth}'(y)=\frac{1}{\mathrm{th}'(\mathrm{argth}(y))}=\frac{1}{1-\mathrm{th}^2(\mathrm{argth}(y))}=\frac{1}{1-y^2}.$$

On retrouve en particulier que argth est strictement croissante sur $]-1,1[$. On a donc le tableau de variation ci-contre, et sa courbe représentative est donnée ci-dessus.

x	0 $\qquad\qquad$ 1
$\mathrm{argth}'(x)$	$+$
$\mathrm{argth}(x)$	$0 \nearrow +\infty$

(c) On peut procédé de deux façon différentes.

- Méthode 1 : On résout l'équation $y=\mathrm{th}(x)$ pour $y\in]-1,1[$ et $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
y=\mathrm{th}(x) &\Leftrightarrow y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \Leftrightarrow y(e^{2x}+1)=(e^{2x}-1)\\
&\Leftrightarrow e^{2x}(y-1)=-1-y\\
&\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{-1-y}{y-1} \text{ car } y\neq 1\\
&\Leftrightarrow 2x=\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \text{ car ln est bijectif et } \frac{1+y}{1-y}>0 \text{ pour } y\in]-1,1[\\
&\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)
\end{aligned}$$

- Méthode 2 : On intègre entre 0 et $y\in]-1,1[$ la fonction argth' :

$$\begin{aligned}
\int_0^y \mathrm{argth}'(t)\mathrm{d}t &= \int_0^y \frac{1}{(1-t)(1+t)}\mathrm{d}t = \int_0^y \frac{1}{2}\frac{(1-t)+(1+t)}{(1-t)(1+t)}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}\int_0^y \frac{1}{(1+t)}+\frac{1}{(1-t)(1+t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[\ln(|1+t|)-\ln(|1-t|)]_0^y
\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{argth}(y)-\mathrm{argth}(0)=\frac{1}{2}\ln(|1+y|)-\ln(|1-y|)$, et donc $\mathrm{argth}(y)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ pour tout $y\in]-1,1[$.