DM13

# Devoir maison à rendre le 21/06/16

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

## Problème 1

Soient 4 dés à six faces non pipés (les faces sont équiprobables et tous les lancés sont indépendants). Le dé $A$ a pour faces $3; 3; 3; 3; 3; 3$. Le dé $B$ à pour faces $2; 6; 2; 6; 2; 2$. Le dé $C$ a pour faces $1; 5; 1; 5; 1; 5$. Le dé $D$ a pour faces $4; 0; 4; 0; 4; 4$. Lorsque deux joueurs s'affrontent, ils lancent chacun un dé (les deux dés étant différents). Le gagnant est celui dont la face du dessus du dé comporte le chiffre le plus grand.

1. Montrer que si Ben joue avec le dé $A$, et Jerry avec le dé $B$, alors Ben a une probabilité de gagner égale à $2/3$.
2. Montrer que si Ben joue avec le dé $B$, et Jerry avec le dé $C$, alors Ben a une probabilité de gagner strictement plus grande qu'un demi. Calculer cette probabilité.
3. Montrer que si Ben joue avec le dé $C$, et Jerry avec le dé $D$, alors Ben a une probabilité de gagner strictement plus grande qu'un demi. Calculer cette probabilité.
4. Que se passe-t-il si Ben joue avec le dé $D$, et si Jerry joue avec le dé $A$ ?
5. On suppose dans cette question que Ben a le droit de sélectionner un des 4 dés, et que ensuite Jerry peut choisir parmi les 3 dés restants. Puis chacun des deux joueurs lance son dé, et le gagnant est celui qui obtient le chiffre le plus grand. Préférez-vous être à la place de Ben ou de Jerry ? Justifiez votre réponse.
6. Toujours avec le jeu de la question précédente, on suppose que Ben doit payer 1 euro à Jerry si Jerry gagne, et que Jerry doit payer $\alpha \geq 0$ euros à Ben si Ben gagne. On suppose que Ben n'accepte de jouer que si son gain moyen est positif ou nul. Donner l'ensemble des $\alpha$ pour lesquels Ben accepterait de jouer.

---

## Problème 2

On considère un espace euclidien $(E, < \cdot, \cdot >)$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de $E$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit l'application $f^*$ de $E$ dans $E$ par :

$$\forall x \in E, \quad f^*(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, f(e_i) > e_i.$$

1. Montrer que $f^* \in \mathcal{L}(E)$. On l'appelle *l'adjoint de* $f$.
2. (a) Montrer que :
$$\forall x, y \in E, \quad < f^*(x), y >=< x, f(y) > .$$
   (b) Montrer que si $g$ est une application de $E$ dans $E$ telle que :
$$\forall x, y \in E, \quad < g(x), y >=< x, f(y) >,$$
   alors $g = f^*$.

   (c) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Quel est l'adjoint de $f^*$ ? de $\lambda f + \mu g$ ? de $f \circ g$ ?

3. Montrer que la définition de $f^*$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$.

4. Montrer que dans toute base orthonormale de $E$, la matrice de $f^*$ est la transposée de celle de $f$.

5. Montrer que :
$$Ker(f^*) = Im(f)^\perp \quad \text{et} \quad Im(f^*) = Ker(f)^\perp.$$

6. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $p$ est un projecteur orthogonal si et seulement si $p = p^*$.