DM12

Correction du devoir maison

Problème 1

Partie I. Convergence de deux suites

On considère les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = ln(u_n).$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \ln((n+1)!) + n + 1 - (n+1)\ln(n+1) - \frac{1}{2}\ln(n+1) - \ln(n!) - n + n\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(n)\\
&= \ln(n+1) + 1 - (n+\frac{3}{2})\ln(n+1) + (n+\frac{1}{2})\ln(n)\\
&= 1 - (n+\frac{1}{2})(\ln(n+1) - \ln(n)) = 1 - (n+\frac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= 1 - (n+\frac{1}{2})\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $v_n - v_{n+1} \sim \frac{1}{12n^2}$, donc $v_n - v_{n+1} \geq 0$ à partir d'un certain rang. Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum(v_n - v_{n+1})$ converge. Ainsi $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge.

2. La série $S = \sum(v_{n+1} - v_n)$ converge. Or $S_n = v_{n+1} - v_0$, donc on en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

3. Par continuité d'exponentielle, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On a donc $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n! \sim \lambda\sqrt{n}n^n e^{-n}$.

Partie II. Calcul de la constante k

1. (a) $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties, les fonctions $t \mapsto \cos t$ et $t \mapsto \sin^{n+1} t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\begin{aligned}
W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \times \sin^{n+1} t &= \Big[\cos t \sin^{n+1} t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(n+1)(-\cos t \sin^n t)dt\\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\cos^2 t dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\cos^2 t(1-\sin^2 t)dt\\
&= (n+1)W_n - (n+1)IWn + 2.
\end{aligned}$$

   On en déduit que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ puis que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.

(c) De la relation de récurrence de la question précédente, on obtient, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{(2p)(2p-2)} I_{2p-4} \\
&= \frac{(2p-1)(2p-3)(2p-5)}{(2p)(2p-2)(2p-4)} I_{2p-6} = \cdots = \frac{(2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times 1}{(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2} W_0. \\
&= \frac{[(2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times 1]\times[(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2]}{[(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2]^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{(2p)(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)} I_{2p-3} \\
&= \frac{(2p)(2p-2)(2p-4)}{(2p+1)(2p-1)(2p-3)} I_{2p-5} = \cdots = \frac{(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2}{(2p+1)\times(2p-1)\times\cdots\times 3} W_1 \\
&= \frac{[(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2]^2}{[(2p+1)\times(2p-1)\times\cdots\times 3]\times[(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2]} \\
&= \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}
\end{aligned}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1} t - \sin^n t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t (\sin t - 1) dt \leq 0$$

puisque pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin t \leq 1$, donc $\sin^n t(1 - \sin t) \leq 0$. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. D'où :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad W_{2p+1} \leq W_{2p} \leq W_{2p-1}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin t$, donc $0 \leq \sin^n t$. Par positivité de l'intégrale, on a $W_n \geq 0$. De plus $W_n \neq 0$ car la fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est continue et positive et non identiquement nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit en divisant par W_{2p+1} :

$$1 \leq \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} \leq \frac{W_{2p-1}}{W_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}.$$

Ainsi par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}}$ existe et on a :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} = 1.$$

3. On a :

$$\frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} = \frac{\frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}}{\frac{4^p(p!)^2}{(2p+1)!}} = \frac{(2p+1)\pi}{2} \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2 \to 1$$

Ainsi, on a bien :

$$\frac{1}{p}\left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right)^2 \sim \frac{2}{2p+1}\left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right)^2 \sim \pi.$$

4. Grâce à l'équivalent précédent, on en déduit que :
$$\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!} \sim p\sqrt{\pi}.$$
Or $p! \sim k\sqrt{p}\left(\frac{p}{e}\right)^p$, d'où en remplaçant dans l'expression :
$$\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!} \sim \frac{2^{2p}k^2 p\left(\frac{p}{e}\right)^{2p}}{k\sqrt{2p}\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}} = k\sqrt{\frac{p}{2}}.$$
Finalement on obtient que $\frac{k}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}$, soit encore $k = \sqrt{2\pi}$.

Partie III. Applications

1. Le lancé d'une pièce correspond à une expérience aléatoire à deux issus, pile ou face, avec la probabilité de succès p (pour pile par exemple). On répète n fois cette expérience, d'où une probabilité p_k d'avoir k succès égale à :
$$p_k = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}.$$
D'où dans le cas qui nous intéresse ($p = 1/2$ car la pièce est équilibrée) :
$$p_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$
En utilisant la formule de Stirling, on obtient :
$$p_n \sim \frac{1}{4^n}\frac{\sqrt{4n\pi}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2n\pi\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$
Ainsi, on a bien que $p_n \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$.

2. On calcule la somme partielle de cette série pour $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right)^k - n\\ &= ln\left(\frac{(2n+1)^n}{(2n-1)^n}\frac{(2n-1)^{n-1}}{(2n-3)^{n-1}}\cdots\frac{3^1}{1^1}\right) - n\\ &= ln\left(\frac{(2n+1)^n}{(2n-1)(2n-3)\dots 1}\right) - ln(e^n)\\ &= ln\left(\frac{(2n+1)^n(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n)!\times e^n}\right)\\ &= ln\left(\frac{(2n+1)^n 2^n n!}{(2n)!\times e^n}\right)\end{aligned}$$
Or on a avec la formule de Stirling :
$$\frac{(2n+1)^n 2^n n!}{(2n)!\times e^n} \sim \frac{(2n+1)^n 2^n\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}}{\sqrt{4\pi n}\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\times e^n} = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n$$

Comme enfin $\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n = exp\left(nln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right) \to e^{1/2}$, on en déduit finalement que $\sum u_n$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sqrt{\frac{e}{n}}.$$

Problème 2

Partie I. Étude de deux applications

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\deg(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)) \leq \max(P\left(\frac{X}{2}\right), P\left(\frac{X+1}{2}\right)) = \max(P(X), P(X)) \leq 2.$$

Donc f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$. Elle est de plus linéaire car pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= \frac{1}{2}\left[(\lambda P + \mu Q)\left(\frac{X}{2}\right) + (\lambda P + \mu Q)\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{\lambda}{2}P\left(\frac{X}{2}\right) + \frac{\lambda}{2}P\left(\frac{X+1}{2}\right) + \frac{\mu}{2}Q\left(\frac{X}{2}\right) + \frac{\mu}{2}Q\left(\frac{X+1}{2}\right) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire et est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. $f(1) = 1$, $f(X) = \frac{X}{4} + \frac{X+1}{4} = \frac{X}{2} + \frac{1}{4}$ et

$$f(X^2) = \frac{X^2}{8} + \frac{X^2+2X+1}{8}.$$

Ainsi la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure avec des coefficients non nuls sur la diagonale. On en déduit qu'elle est inversible. En particulier f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Elle est donc en particulier injective et surjective.

4. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\phi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$$

Donc ϕ est linéaire, c'est une forme linéaire.

5. On a $P \in Ker(\phi) \Leftrightarrow P(1) = 0 \leftrightarrow (X-1)|P$. Ainsi on a :

$$Ker(\phi) = \{(aX+b)(X-1) | a, b \in \mathbb{R}\} = Vect(X(X-1), (X-1)).$$

Comme les vecteurs $X(X-1)$ et $X-1$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que $(X(X-1), X-1)$ est une base de $Ker(\phi)$, et donc que $\dim Ker(\phi) = 2$.

6. L'application ϕ n'est pas injective car $Ker(\phi) \neq \{0_E\}$. Elle est surjective car par le théorème du rang $rg(\phi) = 1 = \dim(\mathbb{R})$. Puisque $Im(\phi) \subset \mathbb{R}$, on a bien $Im(\phi) = \mathbb{R}$ et ϕ est surjective.

Partie II. Calcul des puissances successives d'une matrice

1. La famille $\mathcal{B}'$ est de degré échelonnée, donc c'est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$. Puisque la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$ est 3, on en déduit que c'est une base de cet espace.

2. $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Q est inversible en tant que matrice de passage entre deux bases (ou parce que Q est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls). On calcule son inverse par le pivot de Gauss, on obtient :
$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 2/6 \\ 0 & -1/2 & -3/6 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

4. $f(1) = 1$, $f(-2X+1) = -2f(X) + f(1) = \dfrac{1}{2}(-2X+1)$ et :
$$f(6X^2 - 6X + 1) = 6f(X^2) - 6f(X) + f(1) = \frac{1}{4}(6X^2 - 6X + 1).$$
Ainsi on obtient :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

5. On a $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, $M = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$ et $Q = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Par les formules de changement de bases, on en déduit que :
$$M = Q^{-1}AQ \quad \Rightarrow A = QMQ^{-1}.$$
Dès lors, $A^0 = I_3$, $A^1 = QMQ^{-1}$, $A^2 = QMQ^{-1}QMQ^{-1} = QMI_3MQ^{-1} = QM^2Q^{-1}$. On montre alors par récurrence (laissée au lecteur, faites là si cela n'est pas clair pour vous !) que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$A^n = QM^nQ^{-1}.$$
Or M est une matrice diagonale, d'où immédiatement :
$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1/4^n \end{pmatrix}.$$
Reste à présent à faire le produit matriciel $A^n = QM^nQ^{-1}$ dont on connait tous les termes. On trouve :
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) & \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a grâce à l'expression de A^n :
$$f^n(P) = af(X^2) + bf(X) + cf(1) = a\left[\frac{X^2}{2^n} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\right] + b\left[(\frac{X}{2^n} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right] + c.$$

7. On a $\phi(f^n(P)) = a\left[\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\right] + b\left[(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right] + c$ qui tend vers $\dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} + c = \displaystyle\int_0^1 at^2 + bt + c\, dt = \int_0^1 P(t)dt$. D'où le résultat.

Partie III. Une autre preuve du résultat précédent

1. La propriété est vraie au rang 1 par définition de f.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons la propriété vraie au rang n. Au rang $n+1$, on a pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\begin{aligned}
f^{n+1}(P) &= f^n \circ f(P) \\
&= f^n\left(\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]\right) \\
&= \frac{1}{2} f^n\left(P\left(\frac{X}{2}\right)\right) + f^n\left(P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \text{ par linéarité de } f^n \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + P\left(\frac{\frac{X+k}{2^n}+1}{2}\right) \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + P\left(\frac{X+k+2^n}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k+2^n}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) \text{ par changement de variables} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

   D'où la propriété au rang $n+1$. On conclut par principe de récurrence.

2. On en déduit que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\phi(f^n(P)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{1+k}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

   On reconnait une somme de Riemann associée à P entre 0 et 1. P étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \phi\left(f^n(P)\right) = \int_0^1 P(t)dt$$
