# Feuille de TD n° 5

## Fractions rationnelles

**Exercice 1.** Décomposer chacune des fractions rationnelles suivantes en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

$$F_1 = \frac{X^4+1}{X^2-4} \ ; \ F_2 = \frac{1}{X^2(X+1)} \ ; \ F_3 = \frac{X^4+1}{X^3-X} \ ; \ F_4 = \frac{2X+1}{X^5-X^4-X^3+X^2}$$

En déduire la dérivée $n^{eme}$ de $F_1$, les branches infinies de $x \mapsto F_3(x)$ et une primitive de $F_2$ et $F_4$.

**Exercice 2.** Décomposer chacune des fractions rationnelles suivantes en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

$$F_1 = \frac{1}{(X^3-1)^2} \ ; \ F_2 = \frac{1}{X^4+1}$$

On pourra pour cela calculer $F_1(jX)$ et $F_2(iX)$.

**Exercice 3.** Décomposer chacune des fractions rationnelles suivantes en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$

$$F_1 = \frac{X^2+X+1}{(X-1)(X-2)^2(X^2+1)} \ ; \ F_2 = \frac{1}{X^3-1} \ ; \ F_3 = \frac{X^4}{(X^2+X+1)^2(X-1)}$$

**Exercice 4.** Calculer

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

et en déduire la limite de $S_n$.

**Exercice 5.** Décomposer, de deux manières, en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

$$\frac{1}{X^n-1}.$$

En déduire que $\prod_{h \neq k} |z_h - z_k| = n^{\frac{n}{2}}$ où $z_k = \exp(\frac{2ik\pi}{n})$.

**Exercice 6.** Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction $\dfrac{P}{X^n-1}$ et en déduire l'égalité

$$P(0) = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} P(\omega).$$

## Pour vous exercer

**Exercice 7.** Décomposer les fractions

- $F_1 = \dfrac{X^5+1}{X^2-1} \left( = X^3 + X + \dfrac{1}{X-1} \right)$,
- $F_2 = \dfrac{X-1}{X^3(X+1)} \left( = \dfrac{2}{X+1} - \dfrac{2}{X} + \dfrac{2}{X^2} - \dfrac{1}{X^3} \right)$,
- $F_3 = \dfrac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)} \left( = 1 + \dfrac{1}{2(X-1)} - \dfrac{8}{X-2} + \dfrac{27}{2(X-3)} \right)$.