Feuille de TD n° 4

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Dans tout ce TD, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Ensemble $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1. Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme composé

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^k.$$

1. Démontrer pour tout $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$,
   (a) pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $(\alpha P) \circ Q = \alpha(P \circ Q)$,
   (b) $(P + Q) \circ R = P \circ Q + P \circ R$,
   (c) $(PQ) \circ R = (P \circ R)(Q \circ R)$,
   (d) $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$.
2. Montrer que si $\deg(Q) \geq 1$, $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$.
3. La loi $\circ$ est-elle commutative dans $\mathbb{K}[X]$? distributive à gauche par rapport à l'addition dans $\mathbb{K}[X]$?

Exercice 2. ***Valuation***
On définit l'application valuation sur $\mathbb{K}[X]$ par

$$\mathrm{Val}(P) = \begin{cases} +\infty & \text{if } P = 0, \\ \sup\{n \in \mathbb{N} | a_k = 0, \forall k < n\} & \text{if } P \neq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que
   (a) si $P \neq 0$, $\mathrm{Val}(P) \leq \deg(P)$,
   (b) $\mathrm{Val}(P + Q) \geq \min\{\mathrm{Val}(P), \mathrm{Val}(Q)\}$,
   (c) $\mathrm{Val}(PQ) = \mathrm{Val}(P) + \mathrm{Val}(Q)$.
   (d) $\mathrm{Val}(\lambda \cdot P) = \mathrm{P}$ pour tout $\lambda \neq 0$.
2. Montrer qu'une famille de polynômes graduée en valuation est libre.
3. Application : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille

$$\{X^k(1 - X)^{n-k} \mid k \in [|0, n|]\}$$

   est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 3.
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tels que $P(X + 1) - P(X - 1) = X^2 + 1$.

Exercice 4.
1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'(X)^2 = 4P(X)$.

Exercice 5.
Trouver tous les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation : $(X^2 + 1)P'' - 6P(X) = 0$.

Divisibilité

Exercice 6.
Effectuer la division de $A \in \mathbb{C}[X]$ par $B \in \mathbb{C}[X]$ dans les cas suivants :

1. $A(X) = X^3 - 1, \quad B(X) = X + 2$;
2. $A(X) = X^4 + iX^3 - iX^2 + X + 1, \quad B(X) = X^2 + iX + 1$;
3. $A(X) = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2, \quad B(X) = X^2 + (1 - i)X + 1 + i$.

Exercice 7.
Montrer que $X(X + 1)(2X + 1)$ divise $A(X) = (X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$.

Exercice 8.
Sans effectuer la division, déterminer le reste de la division de :

$$A(X) = (\cos a + X \sin a)^n \quad \text{par} \quad B(X) = X^2 + 1.$$

Exercice 9.
Trouver tous les polynômes de degré $\leqslant 3$ tels que $P(0) = 1,\ P(1) = 2,\ P(2) = -1,\ P(3) = -2$.

Exercice 10.
Soit P un polynôme à coefficients réels. En notant R le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$, montrer que $R(i) = P(i)$. En déduire que $X^2 + 1$ divise P si et seulement si $P(i) = 0$. Montrer ce même résultat sans passer par le reste de la division enclidienne.

Exercice 11.
Dans $\mathbb{Q}[X]$, on considère les polynômes $A = X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$ et $B = 3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7$. Calculer le pgcd de A et de B et trouver U, V tels que $AU + BV = A \wedge B$.

Racines

Exercice 12.
Les polynômes $A(X) = X^5 + X^4 + X - 2$ et $B(X) = X^3 - X + 1$ ont-ils une racine commune ?

Exercice 13.
Déterminer a et b pour que $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$ admette la racine double $X = 1$. Quel est alors le quotient de $P(X)$ par $(X - 1)^2$?

Exercice 14.
Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Soit le polynôme $P(X) = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} ... + \dfrac{X^n}{n!}$.

1. Calculer $P(X) - P'(X)$.
2. Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

Exercice 15.
Montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 3 admet une racine réelle de deux manières différentes (en passant par $\mathbb{C}[X]$ ou non par $\mathbb{C}[X]$). Est-ce que tout polynôme de degré 4 et plus admet une racine réelle ?

Exercice 16.
Soit P un polynôme non constant et $m \geq 1$. On suppose que a est racine de P de multiplicité exactement m. Montrer que a est racine de P' de multiplicité exactement $m-1$.

Exercice 17.

Montrer que les seuls polynômes périodiques $P \in \mathbb{C}[X]$ (i.e. tels que il existe $k \in \mathbb{C}^*$ tel que $P(X+k) = P(X)$) sont les polynômes constants.

Exercice 18.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré non nul. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ? Pour celles qui sont vraies, justifier ; pour celles qui sont fausses, donner un contre-exemple.

1. Si P est de degré impair, alors P admet une racine réelle.
2. Si P admet une racine réelle, alors P' admet une racine réelle.
3. Si P admet deux racines réelles, alors P' admet une racine réelle.
4. Si toutes les racines de P' sont simples, alors toutes les racines P sont simples.
5. Si toutes les racines de P sont simples, alors toutes les racines de P' sont simples.

Polynômes irréductibles - Factorisation

Exercice 19.
Quels sont les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Exercice 20.
Factoriser $A(X) = X^5 + X$ dans $\mathbb{C}[X]$. (Il y a deux manières de faire.)

Exercice 21.
Trouver la décomposition de $A(X) = X^6 + 1$ en produit de polynômes irréductibles et unitaires de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 22.
Soit le polynôme $P(X) = X^4 + (-4+2i)X^3 + (12-8i)X^2 + (4+26i)X - 13$.

1. Montrer que $-i$ est une racine de P. Préciser son ordre de multiplicité.
2. Calculer les racines de P.

Exercice 23.
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^5 + 8X^4 + 26X^3 + 44X^2 + 40X + 16$ après avoir vérifié qu'il admet -2 pour racine.

Exercice 24.
Factoriser $A(X) = X^4 - 2X^3 - X + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$ de deux manières :

1. en remarquant que 2 est racine, puis en factorisant d'abord dans $\mathbb{C}[X]$;
2. sans passer par $\mathbb{C}$.

Exercice 25.
Soit n un entier strictement positif. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n.$$

Exercice 26.
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^4 - 2X^2 \cos\phi + 1$ où ϕ est un réel donné.

Relations coefficients - racines

Exercice 27.
Soient $n \in \mathbb{N}^*, x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}^*$. Exprimer $S_2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$, $S_3 = \sum_{k=1}^n x_k^3$ et $S_{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$ à l'aide des fonctions symétriques élémentaires.

Exercice 28. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ les systèmes

$$(1) \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0 \\ xy+yz+zx &=& -13 \\ xyz &=& -12 \end{array} \right. \quad (2) \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& -2 \\ x^2+y^2+z^2 &=& 0 \\ x^3+y^3+z^3 &=& 1 \end{array} \right. \quad (3) \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ x^2+y^2+z^2 &=& -1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &=& 1 \end{array} \right.$$

Quelques classiques

Exercice 29. ***Polynômes d'interpolation de Lagranges***

Etant donné (n+1) complexes distincts $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ et (n+1) complexes $(b_0, b_1, \cdots, b_n)$, on cherche un polynôme P de degré minimal tel que

$$\forall i \in [|0,n|], P(a_i) = b_i.$$

Proposition : Un tel polynôme existe. Il est de plus unique si l'on suppose que $\deg(P) \leq n$.

1. Un exemple : Montrer que la famille $(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$. Déterminer les coordonnées d'un élément quelconque de $\mathbb{C}_2[X]$ dans cette base. Déterminer le polynôme P de degré 2 tel que $P(0) = 0,5, P(1) = 0,127, P(2) = -0,5$.
2. Cas général : On définit $L_i = \prod_{k \neq i} \frac{X-a_k}{a_i-a_k}$. Calculer $L_i(a_j)$. En déduire que $(L_0, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P dans cette base ?
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\forall i \in [|0,n|], P(a_i) = b_i$.

Exercice 30. ***Polynômes de Tchebytchev***

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique polynôme T_n de degré n tel que
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.
3. Quelle est la parité de T_n ?
4. Quel est le coefficient dominant de T_n ?
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,
$$(x^2-1)T_n''(x) + xT_n'(x) = n^2 T_n(x).$$