Feuille de TD n° 2

Structures algébriques

Lois de compositions internes

Exercice 1. Étudier les lois suivantes (sont-elles des LCI, associatives, commutatives, avec élément neutre, symétrique d'un élément symétrisable ?)

1. la soustraction dans $\mathbb{Z}$,
2. la loi $\circ$ sur $\mathbb{Q}$ définie par $x \circ y = \frac{x+y}{2}$,
3. la loi $*$ sur $\mathbb{Z}$ définie par $x \circ y = 2x - y + 1$,
4. la loi $*$ sur $\mathbb{R}$ définie par $x * y = x + y + xy$,
5. la loi $*$ sur $E =]-1, 1[$ définie par $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.

Exercice 2.

1. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la loi de composition usuelle est distributive à droite par rapport à l'addition, mais pas à gauche.
2. Montrer par contre que, si $E = \mathcal{L}(V)$ est l'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel V, alors la distributivité a lieu des deux côtés.

Groupes

Exercice 3. ***Différence symétrique***

Soit E un ensemble non-vide, on définit dans $\mathcal{P}(E)$ la loi de composition Δ par

$$F \Delta G = (F \cap G^c) \cup (G \cap F^c) = \{x \in E | (x \in F \text{ et } x \notin G) \text{ ou } (x \in G \text{ et } x \notin F)\}.$$

1. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe commutatif.
2. Ecrire la table du groupe $(\mathcal{P}(\{0, 1\}), \Delta)$. Comparer avec la table du groupe $(\mathcal{U}_4, \times)$ des racines 4^{eme} de l'unité.

Exercice 4. ***Groupe symétrique $\mathcal{S}_n$***

On considère l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des bijections (ou *permutations*) de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ dans lui-même.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est un groupe à $n!$ éléments pour la loi $\circ$ de composition des applications.
2. Écrire la table du groupe $\mathcal{S}_3$. Le groupe $\mathcal{S}_3$ est-il isomorphe au groupe $\mathcal{U}_6$ des racines 6^{eme} de l'unité ?

3. Montrer que le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est commutatif si et seulement si $n \leq 2$.

Exercice 5.

Soit G l'ensemble des isométries planes laissant invariant un triangle équilatéral ABC.

1. Montrer que G forme un groupe pour la loi $\circ$.
2. Montrer que toute isométrie g de G induit une permutation s_g de l'ensemble $\{A, B, C\}$. En déduire l'ensemble des isométries de G.

Exercice 6. ***Parties génératrices du groupe symétrique***

On appelle *transposition* de $\mathcal{S}_n$ $(n \geq 2)$ toute permutation τ échangeant deux éléments quelconques i et j et laissant invariants tous les autres. On la note $\tau = [i, j]$.

1. Montrer que pour toute permutation σ, il existe $q \in \mathbb{N}$ et des transpositions $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_q$ tels que
$$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_q.$$
2. Calculer $[1, 2] \circ [2, 3] \circ [1, 2]$ et $[2, 3] \circ [3, 4] \circ [4, 5] \circ [3, 4] \circ [2, 3]$.
Établir que toute permutation est produit de transpositions $[k, k+1]$ où $1 \leq k < n$.
3. Calculer $[1, 2] \circ [1, 3] \circ [1, 2]$ et $[1, 3] \circ [1, 4] \circ [1, 3]$.
Établir que toute permutation est produit de transpositions $[1, k]$ où $1 < k \leq n$.

Exercice 7.

1. Soit $(G, *)$ un groupe, $H_i \subset G$ $(i \in I)$ des sous groupes de G. Montrer que $\cap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G.
2. Soit $(G, *)$ un groupe, H_1 et H_2 deux sous-groupes de G. Montrer que
$$H_1 \cup H_2 \text{ est un sous-groupe de } G \Leftrightarrow H_1 \subset H_2 \text{ ou } H_2 \subset H_1.$$

Exercice 8. ***Centre d'un groupe***

On appelle centre d'un groupe $(G, *)$ la partie de G définie par :
$$C(G) = \{c \in G |\ \forall x \in G, c * x = x * c\}.$$

1. Montrer que $C(G)$ est un sous-groupe de G.
2. Si G est commutatif, que vaut $C(G)$?
3. Soit $n \geq 3$. On considère une permutation $\sigma \neq id$ appartenant à $C(\mathcal{S}_n)$. Justifier l'existence d'entiers j et k tels que
$$\sigma(j) \neq j \text{ et } k \notin \{j, \sigma(j)\}.$$
Comparer $\tau \circ \sigma$ et $\sigma \circ \tau$, où τ est la transposition échangeant k et $\sigma(j)$.
En déduire quel est le centre de $\mathcal{S}_n$ pour $n \geq 3$.

Exercice 9. ***Étude des sous-groupes de*** $\mathbb{Z}$

Le but de l'exercice est de montrer que les seuls sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z},+)$ sont les sous-ensembles $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que toute partie $n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$) est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.
2. Réciproquement, soit $H \subset \mathbb{Z}$ un sous-groupe non-trivial, i.e. $H \neq \emptyset, G$.
   (a) Montrer que l'ensemble $\{h \in H | h > 0\}$ est une partie non-vide de $\mathbb{N}^*$. On note n son plus petit élément.
   (b) Montrer que $n\mathbb{Z} \subset H$.
   (c) Montrer que $H \subset n\mathbb{Z}$ (on pensera à utiliser la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$).

Exercice 10.

Soit $(G,*)$ un groupe. À tout élément $a \in G$ on associe l'application $s_a : G \to G$ définie par

$$s_a(x) = a * x.$$

1. Montrer que s_a est une permutation de G.
2. Établir que l'application $\phi : a \in G \mapsto s_a \in \mathcal{S}_G$ est un morphisme de groupes injectif.
3. En déduire que tout groupe peut s'identifier à un sous-groupe d'un groupe symétrique.

Anneaux et corps

Exercice 11.

1. Soit E un ensemble non vide. Montrer que $(\mathcal{P}(E),\Delta,\cap)$ est un anneau commutatif. Quelles sont les inversibles de cet anneau ? Cet anneau est-il intègre ?
2. Considérons l'ensemble $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ des fonctions d'un ensemble X dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(\mathcal{F}(X,\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau commutatif. Quelles sont les inversibles de cet anneau ? Cet anneau est-il intègre ?

Exercice 12. ***Anneau de Gauss***

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib | a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Montrer qu'un élément $a+ib$ est inversible si et seulement si $a^2+b^2 = 1$. En déduire tous les inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 13. Soient a et b les racines complexes de l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$ et on pose

$$A = \{x + ay | x, y \in \mathbb{Z}\} \text{ et } B = \{x + by | x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que $A = B$ et que ce sont des sous-anneaux de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que l'application $\phi : A \to \mathbb{Z}$ définie par $\phi(x + ay) = x^3 + 3xy + y^2$ réalise un morphisme d'anneaux. Établir que :
   - $\forall z \in A, \phi(z) \geq 0$,
   - $\forall z \in A, (\phi(z) = 0) \Rightarrow (z = 0)$,
   - $\forall z \in A, (\phi(z) = 1) \Rightarrow (z \text{ inversible})$.
3. En déduire que si $x + ay$ est inversible, alors $4 - 3y^2 \geq 0$. Expliciter les inversibles de A, et reconnaître les groupe qu'ils forment.

Exercice 14. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et I un idéal de A contenant un élément inversible $x \in A^*$. Montrer que $I = A$.

Exercice 15.

1. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau, $I_j \subset A$ $(j \in J)$ des idéaux de A. Montrer que $\cap_{i \in I} I_j$ est un idéal de A.
2. Soit $(G, *)$ un groupe, $I_1, \cdots, I_k \subset A$ un nombre fini d'idéaux de A. Montrer que
$$I_1 + I_2 + \cdots + I_k = \{i_1 + \cdots + i_k | i_j \in I_j, \forall j = 1, \cdots, k\}$$
est un idéal de A.

Exercice 16. Déterminer l'ensemble des idéaux de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

Exercice 17. On considère un anneau intègre et fini $(A, +, \cdot)$. On associe à tout élément $a \neq 0$ l'application ϕ_a définie par $\phi_a(x) = a \cdot x$. Montrer que ϕ_a est bijective et en déduire que A est un corps.

Exercice 18. ***Morphismes des corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$***

1. Montrer que le seul morphisme du corps $\mathbb{Q}$ est l'identité.
2. Soit f un morphisme du corps $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $f(x) = x$ pour tout rationnel x.
   (b) Montrer que $f(x) \geq 0$ si $x \geq 0$. En déduire que f est croissante.
   (c) En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que f est l'identité.