Feuille de TD n° 1

Relations d'ordre, relations d'équivalence et ensembles de nombres

Relations d'ordre

Exercice 1. Dire si les relations binaires suivantes sont des relations d'ordre ou non. Justifier.

1. L'ensemble $\mathcal{F}(X, E)$ des fonctions d'un ensemble X dans un ensemble ordonné $(E, \prec)$, muni de la relation binaire
$$f \prec g \text{ si pour tout } x \in X, f(x) \prec g(x).$$
2. Le produit cartésien $E \times F$ des ensembles ordonnés $(E, \prec_E)$ et $(F, \prec_F)$ muni de la relation binaire
$$(x, y) \prec (x', y') \text{ si } x \prec_E x' \text{ et } y \prec_F y'.$$
3. Le produit cartésien $E \times F$ des ensembles ordonnés $(E, \prec_E)$ et $(F, \prec_F)$ muni de la relation binaire
$$(x, y) \prec (x', y') \text{ si } (x \prec_E x', x \neq x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \prec_F y').$$
4. Le cercle unité $\mathcal{C}$ de centre O muni de la relation binaire
$$A \prec B \text{ si la mesure principale de l'angle } ([OA], [OB]) \text{ est positive ou nulle.}$$
5. L'ensemble ordonné $(E, \prec)$ muni de la relation binaire duale
$$x \prec' y \text{ si } x \succ y.$$

Construction de l'ensemble $\mathbb{Q}$

Exercice 2. On définit la relation binaire $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$
$$\forall (p, q), (p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, (p, q)\mathcal{S}(p', q') \Leftrightarrow pq' = p'q.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble quotient $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\mathcal{S}$, et on appelle nombres rationnels ses éléments.

Soient x, y deux rationnels, et $(a, b), (c, d)$ des représentants respectifs de x et y. On pose
$$x \times y = \mathcal{C}_{\mathcal{S}}(ac, bd), \text{ i.e. } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

2. Montrer que le produit $\times$ est bien définie, et que $\times$ est
   (a) commutatif : $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $x \times y = y \times x$,
   (b) associatif : $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

   Montrer de plus que
   (a) $\frac{1}{1}$ est l'élément neutre pour $\times$: $\forall x \in \mathbb{Q}$, $x \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \times x = x$.
   (b) tout élément $x \in \mathbb{Q}$ non nul est symétrisable : $\exists y \in \mathbb{Q}$ tel que $x \times y = y \times x = \frac{1}{1}$.

Soient x, y deux rationnels, et $(a, b), (c, d)$ des représentants respectifs de x et y. On pose

$$x + y = \mathcal{C}_{\mathcal{S}}(ad + bc, bd), \text{ i.e. } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

3. Montrer que l'addition $+$ est bien définie, et que $+$ est
   (a) commutative : $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $x + y = y + x$,
   (b) associatif : $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.

   Montrer de plus que
   (a) $\frac{0}{1}$ est l'élément neutre pour $+$: $\forall x \in \mathbb{Q}$, $x + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + x = x$.
   (b) tout élément $x \in \mathbb{Q}$ admet un symétrique pour l'addition : $\exists y \in \mathbb{Q}$ tel que $x + y = y + x = \frac{0}{1}$,
   (c) $\times$ est distributif par rapport à $+$: $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

On a ici montré que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un *corps commutatif*.

Propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$

Exercice 3. Déterminer, lorsqu'elles existent, les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

$$A = \{a + bn,\ n \in \mathbb{N}\} \text{ et } B = \{\frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Exercice 4. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que

1. $A \subset B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$,
2. $A \cup B$ est majorée, et déterminer $\sup(A \cup B$,
3. si $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B$ est majorée. Peut-on déterminer $\sup(A \cap B)$?

Exercice 5. ***Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$***

1. On montre que pour tout $x < y$ réels, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $r \in]x, y[$.
   (a) Traiter le cas $y - x > 1$.
   (b) Cas général : montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $py - px > 1$. Conclure.
2. Montrer que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.