Université de Reims Champagne Ardenne | **Licence MI 2ème année**
U.F.R. Sciences Exactes et Naturelles | **Arithmétique - MA0304**

ÉCRIT TERMINAL / Session de Janvier 2011 (Durée : 2h)

N.B. L'utilisation de documents, calculatrices ou téléphones portables est interdite.

Exercice 1.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   a) Justifier l'existence d'un couple unique $(n, l) \in \mathbb{N}^2$, avec l impair, tel que $k = 2^n l$.
   b) Montrer que $2^{2^n} + 1 \mid 2^k + 1$. [Raisonner en termes de congruences.]
   c) En déduire que si $2^k + 1$ est premier, alors k est une puissance de 2.

2) On va démontrer que la réciproque du résultat précédent est fausse. Pour cela on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$ (appelé *n-ième nombre de Fermat*).
Démontrer que $641 \mid F_5$, sans effectuer la division. On pourra par exemple utiliser l'égalité $2^{32} = 2^{28} \cdot 2^4$, ainsi que les identités (à vérifier) : $5^4 \equiv -2^4$ [641] et $5 \cdot 2^7 \equiv -1$ [641].

3) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $F_0 \cdots F_n = F_{n+1} - 2$.

4) En déduire que $F_m \wedge F_n = 1$ pour tous m, n distincts [supposer par exemple $m < n$].

Exercice 2. On considère le polynôme $P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18$, on note z_1, z_2, z_3, z_4 ses zéros dans $\mathbb{C}$ et on pose

$$s = z_1 + z_2, \quad s' = z_3 + z_4, \quad p = z_1 z_2, \quad p' = z_3 z_4.$$

1) Exprimer les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ associées aux zéros de P en termes de s, s', p, p'.

2) Trouver les zéros complexes du polynôme P, sachant que deux d'entre eux ont un produit égal à 6.

Exercice 3. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$A(X) = \frac{X^8 - X^5 + 2X^4 + X^2 + 1}{X^7 + 2X^5 + X^3}.$$

Exercice 4. Dans ce qui suit, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. On définit alors la fraction rationnelle

$$F(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X + \omega^k}{X - \omega^k} \in \mathbb{C}(X).$$

1) Prouver qu'après réduction au même dénominateur on obtient $F(X) = \dfrac{P(X)}{X^n - 1}$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme de degré n.

2) Montrer l'identité $F(\omega X) = F(X)$.

3) En déduire que $P(\omega X) = P(X)$, et que ceci implique que P est de la forme $P = aX^n + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.

4) Montrer, pour finir, que $F(X) = n\dfrac{X^n + 1}{X^n - 1}$.