Devoir Surveillé n° 1

Mercredi 9 Octobre - Durée 2h

La calculatrice n'est pas autorisée, ainsi que les documents de cours et de TD. Chaque réponse doit être justifiée. Un soin particulier devra être apporté à la rédaction. Le devoir est volontairement trop long, le barème sera établi en conséquence.

Exercice 1. ***Questions de cours***

1. Soit $f : (G, *) \to (G', *')$ un morphisme de groupes. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f) := \{x \in G | f(x) = e_{G'}\}$$

est un sous-groupe de G, et que

$$\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\} \Leftrightarrow f \text{ est injective.}$$

2. Soit $(G, *)$ un groupe, $H_i \subset G$ $(i \in I)$ des sous-groupes de G. Montrer que $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G.

Exercice 2. On considère les applications de $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ dans $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

$$f_1 : x \mapsto x \ ; \ f_2 : x \mapsto \frac{1}{x} \ ; \ f_3 : x \mapsto 1 - x \ ;$$
$$f_4 : x \mapsto \frac{x}{x-1} \ ; \ f_5 : x \mapsto \frac{1}{1-x} \ ; \ f_6 : x \mapsto \frac{x-1}{x}.$$

1. Écrire la table de composition $\circ$ des applications f_i, $i = 1, \cdots, 6$.
2. En déduire que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ est un sous-groupe du groupe des bijections de l'ensemble $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ muni de la loi $\circ$.
3. On considère le groupe $\mathcal{S}_3$ des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, constitué des six éléments

$$\sigma_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \ ; \ \sigma_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \ ; \ \sigma_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \ ;$$
$$\sigma_4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ ; \sigma_5 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ \sigma_6 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Écrire la table de ce groupe. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3. Soit $(G, *)$ un groupe. Pour tout $a \in G$, on définit

$$\varphi_a : x \in G \longrightarrow a * x * a^{-1} \in G.$$

1. Montrer que φ_a est un morphisme du groupe G. Que vaut φ_{e_G} ?
2. Montrer que pour tout $a, b \in G$,

$$\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}.$$

En déduire que φ_a est un automorphisme de G (appelé *automorphisme intérieur*), et que

$$[\varphi_a]^{-1} = \varphi_{a^{-1}}.$$

3. Montrer que
$$\mathrm{Int}(G) := \{\varphi_a \mid a \in G\}$$
est un sous-groupe du groupe $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ des automorphismes de G.
4. Montrer que $\phi : a \in G \mapsto \varphi_a \in Int(G)$ est un morphisme de groupes surjectif, tel que
$$\mathrm{Ker}(\phi) = \{x \in G \mid \forall a \in G, a * x = x * a\}.$$
Rappelons que cet ensemble est appelé le centre du groupe G, noté $\mathcal{C}(G)$.
5. En déduire que $\mathcal{C}(G)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

Exercice 4. On étudie le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par
$$\mathbb{Z}[j] = \{\ a + bj \mid a, b \in \mathbb{Z}\ \}$$
où $j = \exp(2i\pi/3)$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
2. Montrer que $a + bj$ est inversible dans $\mathbb{Z}[j]$ si et seulement si $a^2 - ab + b^2 = 1$.
[Indication : on pensera à utiliser l'application $z \mapsto |z|^2$]
3. Supposons $a + bj$ inversible.
   (a) Montrer que le polynôme $P(x) = x^2 - bx + (b^2 - 1)$ a au moins une racine réelle. En déduire que $4 - 3b^2 \geq 0$.
   (b) Montrer que $b = 1, 0$ ou -1, et déterminer tous les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[j]$. Reconnaître le groupe $\mathbb{Z}[j]^*$ des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[j]$.

Exercice 5. Soit $(G, *)$ un groupe, H un sous-groupe de G. On définit sur G la relation $\mathcal{R}$ suivante : pour tout $x, y \in G$,
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1} * y \in H.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G. On note G/H l'ensemble quotient, i.e. l'ensemble des classes d'équivalences $\overline{x} = \{y \in G | x\mathcal{R}y\}$.
2. Montrer que pour tout $x \in G$, $\overline{x} = xH = \{x * h \mid h \in H\}$.
3. Supposons de plus que G possède un nombre fini d'éléments. Déduire de ce qui précède l'égailté
$$\mathrm{Card}(G) = \mathrm{Card}(H) \times \mathrm{Card}(G/H).$$
Remarque : En particulier on a montré que dans un groupe fini G, le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe.
4. Supposons de plus que G est commutatif. Pour tout $\overline{x}, \overline{y} \in G/H$, on définit le produit
$$\overline{x} \circledast \overline{y} = \overline{x * y}.$$
Montrer que ce produit est bien défini (i.e. qu'il ne dépend pas des représentants x, y choisis pour les classes $\overline{x}, \overline{y}$), et que $(G/H, \circledast)$ est un groupe. On l'appelle le *groupe quotient* de G par H.