Les fractions rationnelles et le corps $K(X)$

1. Définition

<u>déf</u> On appelle corps des fractions rationnelles à coeff dans K le corps des fractions $K(X)$ de l'anneau des polynômes $K[X]$:

× ses éléments sont les classes d'équivalences de $K[X] \times K[X]^*$ pour la relation : $(P_1, Q_1) \sim (P_2, Q_2) \Leftrightarrow P_1 Q_2 = P_2 Q_1$

On note $Cl_\sim(P, Q) = \frac{P}{Q}$

× Ses opérations sont définies (indép des représentants choisis) par

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2} \quad , \quad \frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}$$

<u>prop</u> On considère une fraction rationnelle non nulle $F \in K(X)$. Alors F admet un représentant $\frac{P}{Q}$ tel que $P \wedge Q = 1$. Il est de plus unique (à un scalaire près), ie

si $\frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}$ repr irréd de F, $\exists \lambda \in K^*$. $\tilde{P} = \lambda P$ et $\tilde{Q} = \lambda Q$.

On l'appelle le représentant irréductible de la fraction F.

→ <u>Exple</u> Représentant irréd de X^5+1 / X^3+1.

<u>déf</u> $F \in K(X)^*$, $\frac{P}{Q} = F$ un représentant irréductible de F.

× On appelle pôle de F les racines de Q et ordre de mult de ces pôles leurs ordres de multiplicité en tant que racines de Q

× On appelle racine de F les racines de P et ordre de ces racines leurs ordres de mult en tant que racines de P.

<u>déf</u> On appelle fonction rationnelle associée à une fraction $F = \frac{P}{Q}$ $(P \wedge Q = 1)$ la fonction :

$$\tilde{F} \quad \begin{array}{ccc} K \setminus \{\text{pôle de } F\} & \longrightarrow & K \\ x & \longrightarrow & \dfrac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)} \end{array}$$

<u>déf</u> On appelle degré d'une fraction rationnelle $F = P/Q \neq 0$ le nb entier

$$\deg F = \deg(P) - \deg(Q)$$

Rem Cette définition est indépendante du représentant choisi !

2. Partie entière d'une fraction rationnelle

prop Pour toute fraction $F = \frac{P}{Q} \in K(X)$, il existe un unique couple $(E, R) \in K[X]^2$ tq

$$F = E + \frac{R}{Q} \quad \text{avec } \deg R < \deg S.$$

E s'appelle la partie entière et $\frac{R}{Q}$ la partie fractionnaire de F.

Méthode Pratique Division euclidienne de P par Q. $P = EQ + R$.
E : quotient dans la div eucl de P par Q.
R : reste dans la div eucl de P par Q.

3. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$

Théorème (décomposition de fractions de dénominateur scindé).
Pour toute fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{P(X)}{(X-a_1)^{r_1} \cdots (X-a_p)^{r_p}}$, on a :

$$\frac{P(X)}{(X-a_1)^{r_1} \cdots (X-a_p)^{r_p}} = E(X) + \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\alpha_{k1}}{(X-a_k)} + \frac{\alpha_{k2}}{(X-a_k)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{kr_k}}{(X-a_k)^{r_k}} \right)$$

où $E(X)$: partie entière de F

$(\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kr_k})_{1 \leq k \leq p}$ p familles de scalaires.

Cette décomposition est unique et appelée décomposition en éléments simples de F.

Un premier exemple $A(X) = (X-a_1)^{r_1} \cdots (X-a_p)^{r_p}$

$$\frac{A'(X)}{A(X)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{r_k}{X-a_k}$$

4. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

<u>Thm</u> Pour toute fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{P(X)}{\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{m}(X^2+p_jX+q_j)^{\beta_j}} \quad , \quad p_j^2 - 4q_j < 0$$

On a :

$$F(X) = E(X) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\gamma_{i,j}}{(X-a_i)^j} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{\beta_k} \frac{\lambda_{k,l}X + \mu_{k,l}}{(X^2+p_kX+q_k)^l}$$

où $E(X)$: partie entière de F

$\gamma_{i,j}, \lambda_{k,l}, \mu_{k,l} \in \mathbb{R}$

Cette décomposition est unique, appelée la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

5. En pratique

Voici la façon dont on procédera :

× Mettre F sous forme irréductible $\frac{P}{Q}$, $P \wedge Q = 1$

Pour cela, on cherchera le pgcd du dénominateur et du numérateur qu'on simplifiera.

× Déterminer la partie entière / fractionnaire de F.

× Décomposer $Q = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n}(X-c_i)^{\alpha_i} & \text{dans } \mathbb{C}[X] \\ \prod_{i=1}^{n}(X-a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{m}(X^2+p_jX+q_j)^{\beta_j} & \text{dans } \mathbb{R}[X] \end{cases}$

× Appliquer le théorème précédent, et déterminer les scalaires intervenants. Pour cela, voici quelques méthodes :

- <u>cas d'un pôle simple</u>

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \frac{\alpha}{X-a} + \sum_{k=2}^{p}\left(\frac{\alpha_{k1}}{(X-a_k)} + \dots + \frac{\alpha_{kr_k}}{(X-a_k)^{r_k}}\right)$$

$$\rightsquigarrow \alpha = \left.\frac{P(X)}{Q(X)}(X-a)\right|_{X=a} = \left.\frac{P(X)}{Q'(X)}\right|_{X=a}.$$

- <u>cas d'un pôle multiple</u>

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \frac{\alpha_{11}}{(X-a)} + \dots + \frac{\alpha_{1r_1}}{(X-a)^{r_1}} + \sum_{k=2}^{p}(\quad).$$

$$\rightsquigarrow \alpha_{1r_1} = \left.\frac{P(X)}{Q(X)}(X-a)^{r_1}\right|_{X=a}$$

Pour les autres α_{1s}, on peut :

- évaluer en une valeur simple qui n'est pas un pôle $(0, 1, -1, \dots)$.
- multiplier par X et faire la limite quand $X \to +\infty$.

<u>Rem</u> Si F est paire, impaire :

on obtient une seconde décomposition en éléments simples en changeant X en $-X$: cette seconde décomp est la même par unicité $\rightsquigarrow$ relations entre les coefficients.

<u>Rem</u> La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ peut aussi s'obtenir à partir de celle dans $\mathbb{C}(X)$

6. <u>Exemples</u>

- $\dfrac{X^3}{(X-1)(X-2)}$

- $\dfrac{X^4}{(X^2-4)^2}$

- $\dfrac{1}{X^3-1}$ dans $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$.