TD9

Calculs de primitives et d'intégrales

Autour du théorème fondamental de l'analyse

Exercice 9.1 (★)

Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_{2x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.
Même question pour $h : x \mapsto \int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9.2 (★★)

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que si g est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors f est nulle.

Exercice 9.3 (★★★ - Centrale PSI 2009)

Étudier la fonction $x \mapsto \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$.

Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 9.4 (★★)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

(i) $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

(ii) $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{3-\cos^2(x)}$

(iii) $x \mapsto \sqrt{x}(1-x)$

(iv) $x \mapsto \sqrt{x^4+x^2}$

(v) $x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

(vi) $x \mapsto \sqrt{\frac{\arcsin(x)}{1-x^2}}$

(vii) $x \mapsto \cos^3(x)$

(viii) $x \mapsto \tan^2(x)$

(ix) $x \mapsto e^{-x}\sin(x)^2$

(x) $x \mapsto \cos^3(x)\sin^4(x)$

(xi) $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{th}(x)}$

(xii) $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{sh}(x)^2}$

(xiii) $x \mapsto \frac{x}{(x^2-4)^2}$

(xiv) $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^6}$

Exercice 9.5 (★★)

Pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, calculer $I_{p,q} = \int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9.6 (★★★)

Déterminer des primitives des fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ et $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}$. On précisera le domaine de validité.

Intégration par parties

Exercice 9.7 (★★)

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties :

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(t^2+t+1)e^{-t}\,\mathrm{d}t$

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} te^t\cos(t)\,\mathrm{d}t$

(iii) $\displaystyle\int_{1}^{e} t\ln(t)^2\,\mathrm{d}t$

(iv) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} t^2\arctan(t)\,\mathrm{d}t$

(v) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t$ où $\rho>0$

(vi) $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

(vii) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{t}{\cos(t)^2}\,\mathrm{d}t$

(viii) $\displaystyle\int_{1}^{e^\pi}\sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$

(ix) $\displaystyle\int_{0}^{1/2} e^{\arcsin(t)}\,\mathrm{d}t$

Exercice 9.8 (★★)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

(i) $x\mapsto\arcsin(x)$

(ii) $x\mapsto x^2\sin(x)^3$

(iii) $x\mapsto\dfrac{\ln(\ln(x))}{x}$

(iv) $x\mapsto\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Primitives de fractions rationnelles

Exercice 9.9 (★★)

Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

(i) $x\mapsto\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$

(ii) $x\mapsto\dfrac{x}{x^3-x}$

(iii) $x\mapsto\dfrac{1}{x(x+1)^2}$

(iv) $x\mapsto\dfrac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$

(v) $x\mapsto\dfrac{x}{(x^2-4)^2}$

(vi) $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+4x+5}$

(vii) $x\mapsto\dfrac{3x+2}{x^2+x+1}$

(viii) $x\mapsto\dfrac{2x+1}{x^2+x-3}$

(ix) $x\mapsto\dfrac{4x^2}{x^4-1}$

(x) $x\mapsto\dfrac{1}{x^3+1}$

(xi) $x\mapsto\dfrac{1}{x^4+1}$

(xii) $x\mapsto\dfrac{1}{x(x^2+1)^2}$

Exercice 9.10 (★★)

Soit $\alpha\in\mathbb{C}$ avec $a=\mathrm{Re}(\alpha)$, $b=\mathrm{Im}(\alpha)$. Montrer que :

$$\int^x\frac{\mathrm{d}t}{t-\alpha}=\frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+i\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+K\quad(\text{où } K\in\mathbb{C}).$$

Changement de variables

Exercice 9.11 (★★)

Déterminer des primitives des fonctions suivantes en utilisant le changement de variable indiqué :

(i) $x\mapsto\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $u=\frac{1}{x}$

(ii) $x\mapsto\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, $u=\sqrt{1+x}$)

(iii) $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $x=u^2$

(iv) $x\mapsto\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec l'un ou l'autre des changements $x=\frac{1}{t}$, $x=\tan(u)$ et $x=\mathrm{sh}(v)$

(v) $x\mapsto\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, $x=\cos(u)$

Exercice 9.12 (★★)

Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variables indiqué :

(i) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2t}}{e^t+1}$, $x = e^t$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)}$, $x = \sin(t)$

(iii) $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{e} \frac{\ln(t)}{t^2+1}$, $x = \frac{1}{t}$

(iv) $\displaystyle\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{3}} \sin(2\theta)\sqrt{\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$, $t = \cos(\theta)$

(v) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x-1}}$, $t = \sqrt{x-1}$

(vi) $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$, $u = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$

Exercice 9.13 (★★)

En posant $t = \tan(x/2)$, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos(x)}$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin(x)}$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)-\cos(x)+\sqrt{2}}$

Exercice 9.14 (★★)

On chercher à calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. En effectuant le changement de variable $u = \cos t$, montrer que l'on peut écrire $I = \displaystyle\int_\alpha^\beta R(u)\,\mathrm{d}u$ où R est une fraction rationnelle.
2. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Calculs sans indication

Exercice 9.15 (★★)

Déterminer une primitive ou l'intégrale des fonctions suivantes :

(i) $x \mapsto \dfrac{x^7}{(x^4+1)^2}$

(ii) $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch} x}$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\,\mathrm{d}x$

(iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)^4}$

(v) $x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{x^2}$

(vi) $x \mapsto x\arcsin(x)$

(vii) $x \mapsto \dfrac{1}{\tan(x)^3}$

(viii) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln(x)^2}}$

(ix) $\displaystyle\int_{1/2}^2 \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\arctan(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 9.16 (★★★)

Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{x\sin^{2024}(x)}{\sin^{2024}(x)+\cos^{2024}(x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9.17 (★★★ - Oral Mines Ponts 2010)

Déterminer une primitive de $x \mapsto \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3$.

Exercice 9.18 (★★★ - Oral Polytechnique)

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x$. En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Suites d'intégrales

Exercice 9.19 (★★)

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^t \,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Donner une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. En déduire la limite de la suite $(n \times I_n)$.

Exercice 9.20 (★★)

On considère la suite (I_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \,\mathrm{d}x$$

1. Établir une relation de récurrence satisfaite par la suite (I_n).
2. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de sommes.
