TD9

Calculs de primitives et d'intégrales

Autour du théorème fondamental de l'analyse

Exercice 9.1 (★)

Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.

Exercice 9.2 (★★)

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
Montrer que si g est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors f est nulle.

Exercice 9.3 (★★★ - Centrale PSI 2009)

Étudier la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t})\,dt + \int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t})\,dt$.

> Notons que f est π-périodique, car $\cos^2$ et $\sin^2$ le sont. Donc il suffit de déterminer f sur $[0, \pi]$.
> De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}, \sin^2(\pi - x) = \sin^2 x$ et $\cos^2(\pi - x) = \cos^2(x)$. Donc il suffit de déterminer f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
> Par le théorème fondamental de l'analyse, f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,
>
> $$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin(x)\cos(x)\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{\sin^2(x)}\right) - 2\sin(x)\cos(x)\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\cos^2(x)}\right) \\ &= 2\sin(x)\cos(x)\operatorname{Arcsin}(\sin x) - 2\sin(x)\cos(x)\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = 2x\sin(x)\cos(x) - 2x\sin(x)\cos(x) = 0. \end{aligned}$$
>
> Donc f est constante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, égale à $f(0) = \int_0^1 \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,dt$.
> Un changement de variable $u = \sqrt{t}$ nous donne alors $f(0) = 2\int_0^1 u\operatorname{Arccos}(u)\,du$.
> Et alors par intégration par parties,
>
> $$\begin{aligned} f(0) &= \left[u^2 \arccos u\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}du \\ &= \int_0^1 \frac{u^2 - 1 + 1}{\sqrt{1-u^2}}du = -\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du + [\arcsin u]_0^1 \\ &= -\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)dx + \frac{\pi}{2} \quad \text{changement de variable } u = \cos x \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{2x + \sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$
>
> Et donc pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{4}$.
>
> **Alternative.** Plus simplement, on peut réaliser que :
>
> $$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{1/2} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}dt + \int_0^{1/2} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}dt = \int_0^{1/2} (\operatorname{Arccos}\sqrt{t} + \operatorname{Arcsin}\sqrt{t})dt = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$
>
> Et donc f est constante égale à $\frac{\pi}{4}$.

Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 9.4 (★★)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

$f_1 : \quad x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$	$f_5 : \quad x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$	$f_8 : \quad x \mapsto \tan^2(x)$	$f_{12} : \quad x \mapsto \frac{1}{\mathrm{sh}(x)^2}$
$f_2 : \quad x \mapsto \frac{\sin(2x)}{3-\cos^2(x)}$	$f_6 : \quad x \mapsto \sqrt{\frac{\arcsin(x)}{1-x^2}}$	$f_9 : \quad x \mapsto e^{-x}\sin(x)^2$	$f_{13} : \quad x \mapsto \frac{x}{(x^2-4)^2}$
$f_3 : \quad x \mapsto \sqrt{x}(1-x)$		$f_{10} : \quad x \mapsto \cos^3(x)\sin^4(x)$	
$f_4 : \quad x \mapsto \sqrt{x^4+x^2}$	$f_7 : \quad x \mapsto \cos^3(x)$	$f_{11} : \quad x \mapsto \frac{1}{\mathrm{th}(x)}$	$f_{14} : \quad x \mapsto \frac{x^2}{1+x^6}$

Exercice 9.5 (★★)

Pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, calculer $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\,\mathrm{d}t$.

Notons tout de suite que si $p = 0$ ou $q = 0$, alors $I_{p,q} = 0$.
Si $p = q$, alors $I_{p,q} = \int_0^{2\pi} \sin^2(pt)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos(2pt))dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2pt)}{2p}\right]_0^{2\pi} = \pi$.
De même, si $p = -q$, alors $I_{p,q} = -I_{p,p} = -\pi$.
Si $p \neq \pm q$, alors à l'aide de la formule de trigonométrie $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$:

$$I_{p,q} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos((p-q)t) - \cos((p+q)t))dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p-q)t)}{p-q} - \frac{\sin((p+q)t)}{p+q}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Exercice 9.6 (★★★)

Déterminer des primitives des fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ et $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}$. On précisera le domaine de validité.

Notons $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

et $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ si, et seulement si, $x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{3\pi}{4}\,[\pi]$.
Cherchons une primitive F et G de f et de g respectivement, par exemple sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$ sur lequel elles sont continues (quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas). Pour tout $x \in I$:

$$F(x) + G(x) = \int^x f(t) + g(t)\,\mathrm{d}t = \int^x 1\,\mathrm{d}t = x.$$

D'autre part :

$$G(x) - F(x) = \int^x \frac{\cos(t) - \sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)}\,\mathrm{d}t = \ln\left(|\cos(x) + \sin(x)|\right).$$

Par somme, $G(x) = \frac{1}{2}\left(x + \ln\left(|\cos(x) + \sin(x)|\right)\right)$ et par différence, $F(x) = \frac{1}{2}\left(x - \ln\left(|\cos(x) + \sin(x)|\right)\right)$.

Intégration par parties

Exercice 9.7 (★★)

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties :

$$I_1 = \int_0^{\pi} te^t \cos(t)\,\mathrm{d}t \qquad I_4 = \int_0^{\sqrt{3}} t^2 \arctan(t)\,\mathrm{d}t \qquad I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$I_2 = \int_1^{e} t\ln(t)^2\,\mathrm{d}t \qquad I_5 = \int_{-1}^{1} \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t \text{ où } \rho > 0 \qquad I_8 = \int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$$

$$I_3 = \int_0^{1} t^3 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_6 = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_9 = \int_0^{1/2} e^{\arcsin(t)}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 9.8 (★★)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

$$f_1 : \quad x \mapsto \arcsin(x) \qquad f_2 : \quad x \mapsto x^2 \sin(x)^3 \qquad f_3 : \quad x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{x} \qquad f_4 : \quad x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Primitives de fractions rationnelles

Exercice 9.9 (★★)

Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

(i) $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$

(ii) $x \mapsto \dfrac{x}{x^3-x}$

(iii) $x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)^2}$

(iv) $x \mapsto \dfrac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$

(v) $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2-4)^2}$

(vi) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$

(vii) $x \mapsto \dfrac{3x+2}{x^2+x+1}$

(viii) $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x-3}$

(ix) $x \mapsto \dfrac{4x^2}{x^4-1}$

(x) $x \mapsto \dfrac{1}{x^3+1}$

(xi) $x \mapsto \dfrac{1}{x^4+1}$

(xii) $x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2+1)^2}$

Exercice 9.10 (★★)

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $a = \mathrm{Re}(\alpha)$, $b = \mathrm{Im}(\alpha)$. Montrer que :

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-\alpha} = \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2) + i\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + K \quad (\text{où } K \in \mathbb{C}).$$

Changement de variables

Exercice 9.11 (★★)

Déterminer des primitives des fonctions suivantes en utilisant le changement de variable indiqué :

(i) $t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$, $u = \dfrac{1}{t}$

(ii) $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$, $u = \sqrt{1+t}$)

(iii) $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $t = u^2$

(iv) $t \mapsto \dfrac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec l'un ou l'autre des changements $t = \frac{1}{t}$, $t = \tan(u)$ et $t = \mathrm{sh}(v)$

(v) $t \mapsto \sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$, $t = \cos(u)$

Exercice 9.12 (★★)

Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variables indiqué :

$$I_1 = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2t}}{e^t+1}\,\mathrm{d}t,\ x = e^t$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)},\ x = \sin(t)$$

$$I_3 = \int_{e^{-1}}^{e} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t,\ x = \frac{1}{t}$$

$$I_4 = \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{3}} \sin(2\theta)\sqrt{\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta,\ t = \cos(\theta)$$

$$I_5 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x-1}},\ t = \sqrt{x-1}$$

$$I_6 = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t,\ u = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$$

Exercice 9.13 (★★)

On chercher à calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{(\sin(t)-2)(2+\sin(t)-\cos(t)^2)}\,\mathrm{d}t$.

1. En effectuant le changement de variable $u = \sin(t)$, montrer que l'on peut écrire $I = \displaystyle\int_\alpha^\beta R(u)\,\mathrm{d}u$ où R est une fraction rationnelle.
2. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 9.14 (★★)

En posant $t = \tan(x/2)$, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos(x)}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin(x)}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)-\cos(x)+\sqrt{2}}$$

Et sans indications ?

Exercice 9.15 (★★)

Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner leurs dérivées.

- $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t+x^2)\,\mathrm{d}t$;
- $h : x \mapsto \displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{\cos(tx)}{t}\,\mathrm{d}t.$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Commençons par effectuer le changement de variables $u = t + x^2$:

$$g(x) = \int_{x^2}^{x+x^2} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{x+x^2} f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^{x^2} f(u)\,\mathrm{d}u = F(x+x^2) - F(x^2)$$

où $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Par le théorème fondamental de l'analyse, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$\mathbb{R}$ car f est continue sur $\mathbb{R}$, et $F' = f$. Par composition, g est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ également, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = (1+2x)f(x+x^2) - 2xf(x^2).$$

- On procède de même en effectuant le changement de variable $u = tx$.

Exercice 9.16 (★★)

Déterminer une primitive ou l'intégrale des fonctions suivantes :

(i) $x \mapsto \dfrac{x^7}{(x^4+1)^2}$

(ii) $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch} x}$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\,\mathrm{d}x$

(iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)^4}$

(v) $x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{x^2}$

(vi) $x \mapsto x\arcsin(x)$

(vii) $x \mapsto \dfrac{1}{\tan(x)^3}$

(viii) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln(x)^2}}$

(ix) $\displaystyle\int_{1/2}^2 \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\arctan(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 9.17 (★★★)

Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{x\sin^{2024}(x)}{\sin^{2024}(x)+\cos^{2024}(x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9.18 (★★★ - Oral Mines Ponts 2010)

Déterminer une primitive de $x \mapsto \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3$.

Peut-être l'avez-vous remarqué, mais pour les fonctions faisant apparaître $\sqrt{1-x^2}$, le changement de variable $x = \cos t$ est potentiellement intéressant, puisqu'il permet de faire apparaître $\sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t}$ en utilisant la relation $\cos^2 t + \sin^2 = 1$.
Puisqu'on a de la même manière $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$, si on pose $x = \mathrm{ch}\, t$, alors $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\mathrm{sh}^2 t}$.
Essayons donc de calculer une primitive de $f : x \mapsto \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3$ à l'aide du changement de variable $x = \pm\mathrm{ch} t$.
Notons que f n'est définie que sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. On a alors

$$\int \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3 \mathrm{d}x = \int (\mathrm{ch}\, t + |\,\mathrm{sh}\, t|)^3 \,\mathrm{sh}\, t\,\mathrm{d}t.$$

- Sur $[1,+\infty[$. Notons que ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$. Notons ch^{-1} sa bijection réciproque. On a alors, pour $u \geq 1$, avec le changement de variable $x = \mathrm{ch}\, t$.

$$\begin{aligned}\int^u \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3 dt &= \int^{\mathrm{ch}^{-1} u} (\mathrm{ch}\, t + |\,\mathrm{sh}\, t|)^3 \,\mathrm{sh}\, t dt \\ &= \int^{\mathrm{ch}^{-1} u} e^{3t}\,\mathrm{sh}(t) dt = \frac{1}{2}\int \left(e^{4t}-e^{2t}\right) dt \\ &= \left[\frac{1}{8}e^{4t} - \frac{1}{4}e^{2t}\right]^{\mathrm{ch}^{-1}(u)}.\end{aligned}$$

Mais $e^{4\,\mathrm{ch}^{-1}(u)} = \left(\mathrm{ch}\left(\mathrm{ch}^{-1}(u)\right) + \mathrm{sh}\left(\mathrm{ch}^{-1}(u)\right)\right)^4 = \left(u+\sqrt{u^2-1}\right)^4$. Et donc une primitive de f sur $[1,+\infty[$ est $x \mapsto \frac{1}{8}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4 - \frac{1}{4}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2$.

- Sur $]-\infty,-1]$, la principale différence viendra du fait que $\sqrt{\mathrm{ch}^2 t-1}=|\,\mathrm{sh}\, t|=-\mathrm{sh}\, t$. On utilise alors le fait que $t\mapsto -\mathrm{ch}(t)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty,-1]$, et le même type de calculs nous mène à une primitive de f de la forme
$$x\mapsto \frac{1}{8}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4-\frac{1}{4}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2.$$

Exercice 9.19 (★★★ - Oral Polytechnique)

Calculer $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x$. En déduire la valeur de $J=\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Notons I l'intégrale à calculer, et réalisons le changement de variable $t=\frac{\pi}{4}-x$, qui laisse invariantes les bornes de l'intégrale.
On a alors $\tan(x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan t}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan t}=\frac{1-\tan t}{1+\tan t}$.
Et par conséquent,

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt=\frac{\pi\ln 2}{4}-I.$$

Et donc $I=\frac{\pi\ln 2}{8}$.

Pour le calcul de J, procédons par intégration par parties :
$$J=\int_0^1\frac{\arctan t}{1+t}dt=[\ln(1+t)\arctan(t)]_0^1-\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt$$
Un changement de variable $u=\arctan t$ dans cette intégrale nous donne alors $t=\tan u\Leftrightarrow dt=(1+\tan^2 u)\,du\Leftrightarrow du=\frac{dt}{1+t^2}$. Et donc
$$\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan u)du=I$$
Il vient donc $J=\frac{\pi\ln 2}{4}-I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Suites d'intégrales

Exercice 9.20 (★★)

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $I_n=\displaystyle\int_1^e(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_0^1 t^n e^t\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Donner une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. En déduire la limite de la suite $(n\times I_n)$.

Exercice 9.21 (★★)

On considère la suite (I_n) définie par :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\sin x\,\mathrm{d}x$$

1. Établir une relation de récurrence satisfaite par la suite (I_n).
2. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de sommes.
