TD8

Nombres complexes

Notations algébrique et trigonométrique

Exercice 8.1 (★★)
Déterminer la forme algébrique de :

$z_1 = \dfrac{e^{2i\theta}}{1-i}$;	$z_2 = (\sqrt{3}-i)^{2015}$;	$z_3 = (1+e^{i\theta})^n$;	$z_4 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 8.2 (★)
Trouver les modules et arguments de :

$z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}$	$z_2 = 1+i\tan\theta$	$z_3 = 1+i\theta$ où $\theta \in]-\pi;\pi[$	$z_4 = \dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$

Exercice 8.3 (★)
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$.

1. Montrer que $|z^3+2iz| \leq 3$.
2. Quels sont les z pour lesquels cette inégalité est en fait une égalité ?

Exercice 8.4 (★)
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{1-z^n}{1-z}\right| \leq \dfrac{1-|z|^n}{1-|z|}$.

Exercice 8.5 (★★)
Pour quelles valeurs de n, le nombre complexe $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est-il un réel positif ?

Exercice 8.6 (★★★)
Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, de forme algébrique $z = a+ib, (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que l'argument principal de z est $\theta = 2\arctan\left(\dfrac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

> Commençons par noter que z n'étant pas un réel négatif, on n'a pas à la fois $b=0$ et $a \leq 0$.
> Si $b \neq 0$, alors $\sqrt{a^2+b^2} > \sqrt{a^2} = |a| \geq -a$, si bien que $a+\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$.
> Et dans le cas où $b=0$, alors $a>0$, et donc $a+\sqrt{a^2+b^2} > 0$, et donc est non nul.
> Donc déjà, $\theta = 2\arctan\left(\dfrac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ est bien défini.
>
> Il s'agit donc de prouver que $\sqrt{a^2+b^2}e^{i\theta} = z$, soit encore que $\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta) = a$ et $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta) = b$. Utilisons pour cela les formules de l'angle moitié : si $t = \tan(\theta/2)$, alors
>
> $$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$$
>
> Or ici, $\tan(\theta/2) = \tan\left(\arctan\left(\frac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right) = \frac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}$. Et donc

$$\cos(\theta) = \frac{1 - \frac{b^2}{\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}}{1 + \frac{b^2}{\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}} = \frac{1 - \frac{b^2}{a^2+2a\sqrt{a^2+b^2}+a^2+b^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2+2a\sqrt{a^2+b^2}+a^2+b^2}}$$
$$= \frac{2a^2 + 2a\sqrt{a^2+b^2}}{2a^2+2b^2+2a\sqrt{a^2+b^2}} = a\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2+a\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Et donc on a bien $\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta = a$. Et de même,

$$\sin(\theta) = \frac{2\frac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{1 + \frac{b^2}{\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}} = \frac{2b}{\frac{2a^2+2b^2+2a\sqrt{a^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}}}$$
$$= b\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2+a\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+a} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Et donc on a bien $\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta = b$.

Ainsi, $\sqrt{a^2+b^2}e^{i\sigma} = a + ib = z$.

Exercice 8.7 (★)
Résoudre dans $\mathbb{C}$:

(i) $e^z + 1 = 0$; | (ii) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$; | (iii) $e^z + e^{-z} = 1$.

Applications au calcul trigonométrique et algébrique

Exercice 8.8 (★)
Linéariser $\sin^5(x)$, $\cos(x)\sin^4(x)$ et $\cos^2(2x)\sin^3(3x)$.

Exercice 8.9 (★★)
Calculer la fraction $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$. En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$

Exercice 8.10 (★)
Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et en déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 8.11 (★★)
Calculer les sommes suivantes (où $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$) :

$$A = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) \qquad B = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb) \qquad C = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb) \qquad D = \sum_{k=0}^{n} \cos^k(a)\sin(ka)$$

Exercice 8.12 (★★)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_1 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$.
Indication : calculer $(1+i)^n$ de deux manières différentes.

D'après la formule du binôme de Newton, on a $(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} i^k \binom{n}{k}$.
Mais i^k ne peut prendre que 4 valeurs : $i, -1, -i$ et 1.
Plus précisément : si $k = 2p$ est pair, alors $i^k = \begin{cases} -1 & \text{si } p \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases} = (-1)^p = (-1)^{k/2}$. Et dans le cas où $k = 2p+1$ est impair, alors $i^k = \begin{cases} i & \text{si } p \text{ est pair} \\ -i & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases} = (-1)^p i$.
Et donc, il vient

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= \sum_{\substack{0 \in k < n \\ k \text{ pir}}} (-1)^{k/2}\binom{n}{k} + i \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impir}}} (-1)^{(k-1)/2}\binom{n}{k} \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} + i \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p+1} \\ &= S_1 + iS_2.\end{aligned}$$

Mais d'autre part, nous savons que $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{7}}$.
Et par conséquent,

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).$$

On en déduit donc que

$$S_1 = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \text{ et } S_2 = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Racines n-èmes

Exercice 8.13 (★)

Déterminer les racines cinquièmes de j et de $\dfrac{2\sqrt{2}}{i-1}$.

Exercice 8.14 (★★)

On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Calculer $u + v$, puis u^2 en fonction de u.
2. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.

Exercice 8.15 (★★)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (où $n \geq 2$) :

(i) $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 2\cos(n\theta)$ où $\theta \in \left]0, \frac{2\pi}{n}\right[$; (ii) $z^n = \bar{z}$.

Exercice 8.16 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

2. Calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En déduire $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1+\omega)^n$.

Exercice 8.17 (★★ - Banque CCINP 89)
Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$ et soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. On suppose que $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $\zeta^k - 1$.

2. On pose $S = \sum_{k=1}^{n-1} \left|\zeta^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$.

1. Déterminer module et argument de $\zeta^k - 1$, c'est déterminer sa forme exponentielle. Et pour cela, notre meilleur allié est la factorisation par l'angle moitié. On a :
$$\zeta^k - 1 = e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1 = e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k}{\pi}n}\right) = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{\frac{ik\pi}{n}}.$$
Soit encore
$$\zeta^k - 1 = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}$$
Puisque $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geq 0$, c'est donc bien le module de $\zeta^k - 1$: $\left|\zeta^k - 1\right| = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et un argument de $\zeta^k - 1$ est $\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}$

2. Notons que pour $k = 0, \zeta^k - 1 = 1 - 1 = 0$, et donc
$$S = \sum_{k=1}^{n-1}\left|\zeta^k - 1\right| = 2\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$
Donc S est la partie imaginaire de
$$A = 2\sum_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^k = 2e^{i\frac{\pi}{n}}\frac{1 - e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} = 2\frac{e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{i\frac{n\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} = 2\frac{e^{i\frac{\pi}{n}} + 1}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}}.$$
Or, comme à la question 1, on prouve que $1 - e^{i\frac{\pi}{n}} = -2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}}$. Et $1 + e^{i\frac{\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{i\frac{\pi}{2n}} + e^{-i\frac{\pi}{2n}}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}}$. Donc après simplification,
$$A = 2i\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = i\frac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}.$$
Et alors $\sum_{k=1}^{n-1}\left|\zeta^k - 1\right| = \frac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 8.18 (★★★ - Polynômes de Tchebychev)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Prouver qu'il existe des entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k(\theta)$.

2. Montrer que $a_n = 2^{n-1}$.

3. Soit $w = \dfrac{3-4i}{5}$. Vérifier que $w \in \mathbb{U}$, mais que $w \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$, c'est-à-dire que w n'est pas une racine de l'unité.

1. On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \operatorname{Re}\left(e^{in\theta}\right) = \operatorname{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (i\sin\theta)^k \cos^{n-k}\theta\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re}\left(\binom{n}{k} i^k \sin^k\theta \cos^{n-k}\theta\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin^k\theta \cos^{n-k}\theta \operatorname{Re}\left(i^k\right) \\
&= \sum_{k=0} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta i^k \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}\theta \sin^{2p}\theta (-1)^p \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p}\theta \left(1-\cos^2\theta\right)^p = P(\cos(\theta))
\end{aligned}$$

où P est la fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p x^{n-2p} \left(1-x^2\right)^p$ à coefficients entiers.

2. On cherche le coefficient a_n de x^n dans P. Pour cela, notons que pour tout $p \in [\![0, \lfloor n/2 \rfloor]$, le coefficient de x^n dans $x^{n-2p}(1-x^2)^p$ est $1 \times (-1)^p$. D'où :

$$a_n = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p (-1)^p = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2p}.$$

Cette somme a déjà été calculée dans un TD précédent (Exercice 4.6), elle vaut $a_n = 2^{n-1}$.

3. On a bien $|\boldsymbol{w}|^2 = \frac{3^2+4^2}{5^2} = 1$, donc $\boldsymbol{w} \in \mathbb{U}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $w \in \mathbb{U}_n$. Si on note θ un argument de w, on a donc $\cos(\theta) = \frac{3}{5}$, et donc $\cos(n\theta) = 1$. Soit encore

$$2^{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\frac{3}{5}\right)^k = 1$$

Donc :

$$2^{n-1}3^n = 5^n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k 3^k 5^{n-k} = 5\left(5^{n-1} - \sum_{k=1}^{n} a_k 3^k 5^{n-1-k}\right).$$

Or le membre de droite est un entier multiple de 5 , alors que celui de gauche ne l'est pas, d'où une contradiction.

Ainsi, w n'est pas une racine de l'unité.

Exercice 8.19 (★★★★ - Irrationalité de $\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ (Oral ENS))

Notons $\alpha = \frac{\arccos\left(\frac{1}{3}\right)}{\pi}$. Le but de cet exercice est de prouver que α est irrationnel, i.e. $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

1. Donner la forme algébrique de $e^{i\pi\alpha}$.

2. Montrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$ si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers a_n et b_n tels que $(1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$, et tels que $a_n - b_n$ ne soit pas divisible par 3. Conclure.

Notons que l'irrationnalité de α signifie qu'il n'existe pas d'angle multiple rationnel de π (angle dont la mesure en degré est un rationnel) dont le cosinus vaut $\frac{1}{3}$.

C'est un cas particulier d'un théorème du à Ivan Niven, qui a prouvé que les seuls angles multiples rationnels de π dont le cosinus est rationnel sont ceux que vous connaissez déjà, c'est-à-dire ceux dont le cosinus vaut $0, \pm\frac{1}{2}$ ou ± 1.

1. On a $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha = \frac{1}{3} + i\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + i\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1+2i\sqrt{2}}{3}$.

2. On a $(1+2i\sqrt{2})^n = 3^n \Leftrightarrow \left(e^{i\pi\alpha}\right)^n = 1$.

   Autrement dit, il s'agit de prouver que $\alpha \in \mathbb{Q}$ si et seulement si $e^{i\pi\alpha}$ est une racine de l'unité.

   D'une part, si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, alors

$$\left(e^{i\pi\frac{p}{q}}\right)^{2q} = e^{2ip\pi} = 1$$

   Et inversement, si $e^{i\pi\alpha}$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $e^{i\pi\alpha} = e^{i\frac{\pi k}{n}}$. Et donc $\pi\alpha \equiv \frac{\pi k}{n} \quad [2\pi] \Leftrightarrow \alpha \equiv \frac{k}{n} \quad [1]$. Et par conséquent, α est rationnel.

   Bref, nous avons bien prouvé que $\alpha \in \mathbb{Q}$ si et seulement si $e^{i\pi\alpha}$ est une racine de l'unité, soit si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$.

3. Montrons par récurrence qu'il existe deux entiers a_n et b_n tels que $(1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$, avec $a_n - b_n$ non divisible par 3.

Init. Pour $n = 1$, c'est évident : on prend $a_n = 1$ et $b_n = 2$, de sorte que $a_n - b_n = -1$ n'est pas divisible par 3.

Hér. Supposons donc acquise l'existence de a_n et b_n vérifiant ces conditions. Alors

$$\begin{aligned}(1+2i\sqrt{2})^{n+1} &= (1+2i\sqrt{2})^n(1+2i\sqrt{2}) = \left(a_n + ib_n\sqrt{2}\right)(1+2i\sqrt{2}) \\ &= (a_n - 4b_n) + (2a_n + b_n)\, i\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Posons alors $a_{n+1} = a_n - 4b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n + b_n$, qui sont bien des entiers.
Et alors $a_{n+1} - b_{n+1} = -a_n - 5b_n = -6b_n + (b_n - a_n)$.
Si $a_{n+1} - b_{n+1}$ était divisible par 3, il existerait alors un entier k tel que

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 3k \Leftrightarrow -6b_n + b_n - a_n = 3k \Leftrightarrow a_n - b_n = 3\,(-k - 2b_n)$$

contredisant le fait que $a_n - b_n$ n'est pas divisible par 3.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc deux entiers a_n et b_n tels que $(1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$ avec $a_n - b_n$ non divisible par 3 .

Supposons donc à présent que α soit rationnel. Il existe alors n tel que $(1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$. Mais alors $a_n + b_n i\sqrt{2} = 3^n$ est réel, et donc $b_n = 0$, et $a_n = 3^n$. Ceci vient contredire le fait que $a_n - b_n$ n'est pas divisible par 3 . Et donc α ne peut pas être rationnel.

Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$

Exercice 8.20 (★★)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(i) $(2+i)z^2+(5-i)z+2-2i=0$;

(ii) $2z^3-(3+4i)z^2-(4-7i)z+4+2i=0$ sachant qu'elle admet une racine réelle ;

(iii) $z^4+(3-6i)z^2-2(4+3i)=0$;

(iv) $z^{2n}-z^n+1-i=0$;

(v) $z^2+2|z|-3=0$.

Exercice 8.21 (★★)

1. Résoudre les systèmes $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=5 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y=3-2i \\ xy=5-i \end{cases}$, d'inconnues $(x,y)\in\mathbb{C}^2$.
2. Pour quelles valeurs de $\lambda>0$ existe-t-il des rectangles pour lesquels l'aire a et le périmètre p sont reliés par la relation $p=\lambda\sqrt{a}$?

Nombres complexes et géométrie plane

Exercice 8.22 (★★)

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

(i) z, $\frac{1}{z}$ et $1+z$ ont le même module ;

(ii) 1, z et z^2 forment un triangle rectangle en z ;

(iii) z, $\frac{1}{z}$ et $-i$ sont alignés.

Exercice 8.23 (★★ - Théorème de l'angle au centre)

1. Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 deux à deux distincts. Montrer que $z=\dfrac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2}$ est un réel positif.
2. Soient A, B et C trois points distincts appartenant à un même cercle de centre O. Montrer l'égalité suivante entre angles orientés $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$.

> La correction dans cette vidéo.

Exercice 8.24 (★★★ - Concours Centrale PSI)

Soit $z\in\mathbb{C}^*$. On note p et q ses deux racines carrées. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les points M, P et Q d'affixes respectives z, p et q forment un triangle rectangle en M.

Exercice 8.25 (★★★)

Soient A,B,C trois points d'affixes respectives a,b et c. On note $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer j^2 et en déduire une expression de $e^{i\frac{\pi}{3}}$ en fonction de j.

2. Montrer que ABC est équilatéral direct (c'est-à-dire avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ si, et seulement si, $a + bj + cj^2 = 0$.

3. Montrer que ABC est équilatéral si, et seulement si, $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Exercice 8.26 (★★ - Similitudes directes)

1. Caractériser géométriquement la similitude associée à $f : z \mapsto (2i + 1)z - 1$.

2. Soit T la translation de vecteur $\vec{u}(-1, 0)$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Caractériser géométriquement $T \circ R \circ T$ et $R \circ T \circ R$.

Exercice 8.27 (★★★★)

1. Que peut-on dire de la composée de deux rotations ? de deux translations ? de deux homothéties ? d'une homothétie et d'une translation ?

   Pour chaque composée, on identifiera la transformation obtenue et on en donnera ses éléments caractéristiques.

2. Soient ABC un triangle non aplati, et $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (BC)$. Montrer que :

$$M, N, P \text{ alignés} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{MA}{MB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

   Pour ce faire, on introduira les homothéties h_M de centre M transformant B en A, h_N de centre N transformant A en C, h_P de centre P transformant C en B, et on considèrera $f = h_P \circ h_N \circ h_M$.
