TD26

Applications linéaires

Applications linéaires - Généralités

Exercice 26.1 (★)

Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est linéaire ou non, et le cas échéant, déterminer une base de son noyau, ainsi que son rang et une base de son image si elle est de rang fini.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y, x+y-3z) \end{array} ;$$

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (4x+y, x-y, 2x+3y) \end{array} ;$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y, 4x-y, x+y+3z) \end{array} ;$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+1, 2x-y, z+3y) \end{array} ;$$

$$f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+i\bar{z} \end{array} ;$$

$$f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(1)+P'+X \end{array} ;$$

$$f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P-(X+1)P' \end{array} ;$$

$$f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(-1)+2XP' \end{array} ;$$

$$f_9 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array} ;$$

$$f_{10} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \mathrm{tr}(M)I_2 \end{array} ;$$

$$f_{11} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^2+2M^\top \end{array} ;$$

$$f_{12} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 26.2 (★★)

Montrer qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0) = (0,1), \quad f(1,1,0) = (1,0), \quad f(1,1,1) = (1,1).$$

Déterminer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, ainsi que le noyau et l'image de f.

Exercice 26.3 (★★)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 26.4 (★★)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $f^2 - 5f + 6\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{id}_E).$$

Exercice 26.5 (★★★)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).$$

Exercice 26.6 (★★)

Donner une base et la dimension des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

(i) l'ensemble F des suites vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

(ii) l'ensemble G des suites p-périodiques avec $p \geq 1$.

Exercice 26.7 (★★)

1. Pour tout $n \geq 2$, on pose $\varphi_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P + P(0)X + XP'' \end{array}$. Montrer que φ_n est un isomorphisme.
2. En déduire que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P + P(0)X + XP'' \end{array}$ est un isomorphisme.
3. Les endomorphismes $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P'' \end{array}$ sont-ils injectifs ? surjectifs ?

Projecteurs, symétries, homothéties

Exercice 26.8 (★)

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (-9x + 6y, 15x + 10y, -5x + 3y + z).$$

Montrer que f est un projecteur, et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 26.9 (★★ - ✍)

1. À l'aide d'un raisonnement par analyse synthèse, montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit p le projecteur sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, q le projecteur associé. Déterminer $p(M)$ et $q(M)$ en fonction de M et $M^\top$.

Exercice 26.10 (★★)

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On pose $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 2, 3)$, $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_3)$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de E.
2. Donner l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G.
3. Donner l'expression de la symétrie s par rapport à G et parallèlement à F.

Exercice 26.11 (★★)

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$, $A \neq 0$. On considère l'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ qui à P associe R, reste de la division euclidienne de P par A. Montrer que f est un projecteur et déterminer son image et son noyau.

Exercice 26.12 (★★)

Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des réels deux à deux distincts, et soient $L_0, L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. On note :

$$\pi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i) L_i \end{array}.$$

1. Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$, dont on déterminera le noyau et l'image.
2. Montrer que $F = \left\{ Q \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - \lambda_k), \, Q \in \mathbb{R}[X] \right\}$ est un supplémentaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 26.13 (★★)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q des projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer qu'alors :

$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q).$$

Exercice 26.14 (★★★)

Soient deux entiers $n \geq 1$ et $k \geq 2$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_k$ des endomorphismes de E tous non nuls et tels que :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(p_1) + \mathrm{rg}(p_2) + \cdots + \mathrm{rg}(p_k) \leq n.$$

1. Montrer que $E = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \mathrm{Im}(p_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_k)$.
2. Montrer que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, l'endomorphisme p_i est un projecteur de E, et que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$: $\quad p_i \circ p_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
3. Montrer que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, p_i est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p_i)$ parallèlement à $K_i = \displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathrm{Im}(p_j)$.

Exercice 26.15 (★★)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, p un projecteur de E et u un endomorphisme de E.

Montrer que p et u commutent si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.

Exercice 26.16 (★★)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient p et q des projecteurs de E. Montrer que :

$$\begin{cases} p \circ q = p \\ q \circ p = q \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(q) \quad \text{et} \quad \begin{cases} p \circ q = q \\ q \circ p = p \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q).$$

Exercice 26.17 (★★★)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{GL}(E)$ et p un projecteur tel que $f = g \circ p$.

Exercice 26.18 (★★ - Caractérisation des homothéties - ✍)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f laisse stable toutes les droites vectorielles.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique scalaire $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x \cdot x$.
2. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E.
   (a) Montrer que si x et y sont liés, alors $\lambda_x = \lambda_y$.
   (b) Montrer que si (x, y) est une famille libre, alors $\lambda_{x+y} = \lambda_x$. En déduire que $\lambda_x = \lambda_y$.
3. Déduire de ce qui précède que f est une homothétie.

Exercice 26.19 (★★★★ - ✍)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Quel est le centre de $\mathrm{GL}(E)$?

Rang d'une application linéaire

Exercice 26.20 (★★)

Soit $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. Préciser le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P.
2. Montrer que Δ est linéaire. Préciser son noyau et son image.
3. Montrer que Δ induit un isomorphisme d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}[X]$ à déterminer sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 26.21 (★★)

Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f + g = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leq n$ où $n = \dim(E)$. Montrer que f et g sont des projecteurs.

Exercice 26.22 (★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient u, v deux endomorphismes de E tels que $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$. Prouver que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont supplémentaires dans E, et que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 26.23 (★★)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Montrer que :
$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$
2. Déterminer $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$ lorsque $f + g \in \mathrm{GL}(E)$ et $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 26.24 (★★★ - Inégalité de Sylvester)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :

$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - n \leq \operatorname{rg}(f \circ g) \leq \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)).$$

Exercice 26.25 (★★★)

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$.

Exercice 26.26 (★★★)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F et G des sous-espaces vectoriels de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im}(u) = F$ et $\operatorname{Ker}(u) = G$.

Endomorphismes nilpotents

Exercice 26.27 (★★ - ✍)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose que f est nilpotent, d'indice de nilpotence p (c'est-à-dire tel que $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$). On souhaite prouver que $p \leq n$.
   (a) Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$.
   (b) Montrer qu'alors la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
   (c) Conclure.
2. On suppose à présent que pour tout $x \in E$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p(x) = 0_E$. Montrer que f est nilpotente.

   Ce résultat est-il encore vrai si on ne suppose plus E de dimension finie ?

Exercice 26.28 (★★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que u est nilpotent, et que $\dim(\operatorname{Ker} u) = 1$. Montrer que pour tout $k \leqslant n$, on a $\dim\Big(\operatorname{Ker}(u^k)\Big) = k$.

Formes linéaires et hyperplans

Exercice 26.29 (★★ - Formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_A(M) = \operatorname{tr}(AM)$.
   Montrer que φ_A définit une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On considère l'application $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ définie par $\Phi(A) = \varphi_A$.
   (a) Montrer que Φ est linéaire.
   (b) Montrer que Φ est un isomorphisme.
   Indication. On pourra calculer $\varphi_A(E_{i,j})$ où $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire d'indice $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$.

(c) En déduire que pour toute forme linéaire φ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = \operatorname{tr}(AM)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Déterminer toutes les formes linéaires φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ satisfaisant :

$$\forall M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(MN) = \varphi(NM).$$

Exercice 26.30 (★★)
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. On suppose que :

$$\forall f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}), \quad f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

   Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

2. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E. On suppose qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_i(x) = 0$. Montrer que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est liée.

Exercice 26.31 (★★★)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que si F et G sont deux hyperplans de E, ils possèdent un supplémentaire commun.

2. On suppose que $\dim F = \dim G$. Montrer que F et G possèdent un supplémentaire commun.

Exercice 26.32 (★★★ - Isomorphisme canonique entre E et son bidual - ✍)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ et $(E^*)^* = \mathscr{L}(E^*, \mathbb{K})$.

1. Soit $x \in E$. Montrer que $\varphi_x : f \in E^* \mapsto f(x)$ est une forme linéaire sur E^*.

2. Montrer que $\varphi : x \in E \mapsto \varphi_x \in (E^*)^*$ est un isomorphisme de E sur son bidual $(E^*)^*$.

Exercice 26.33 (★★★★ - Oral ENS)
Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il d'hyperplans dans un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension n ?
