TD25

Intégration

Fonctions uniformément continues, en escaliers, continues par morceaux

Exercice 25.1 (★★)

1. Soit f une fonction uniformément continue sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$. Soient (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de $\mathscr{D}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$.

   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) - f(y_n) = 0$.

2. La fonction ln est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$? Sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, $a > 0$?

Exercice 25.2 (★★)

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et admettant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25.3 (★★★)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $|f(x)| \leq ax + b$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 25.4 (★★★)

Montrer que $\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R}) = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}) + \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ (le $+$ désignant la somme de sous-espaces vectoriels).

Propriétés de l'intégrale, calculs

Exercice 25.5 (★)

Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \;;$$

(★) $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n x^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x \;;$$

(★★) $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \cos(nx^2)\,\mathrm{d}x \text{ où } 0 < a < b.$$

Exercice 25.6 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}.$$

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 25.7 (★★)

Donner un équivalent, lorsque $x \to +\infty$, de :

- $\displaystyle\int_0^x \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t$;
- $\displaystyle\int_0^x |\sin(t)| \,\mathrm{d}t$.

Exercice 25.8 (★★ - Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire - ✍)

Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f|(t)\,\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est un signe constant sur } [a,b].$$

Exercice 25.9 (★★)

Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f possède un point fixe.

Exercice 25.10 (★★★ - Première formule de la moyenne)

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec g positive.

   Prouver qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

2. En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Soit f continue au voisinage de 0. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 25.11 (★★★)

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\|f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(t)^n\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 25.12 (★★★ - Lemme de Riemann-Lebesgue - ✍)

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$. On souhaite prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. Commencer par traiter le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.

2. Traiter le cas d'une fonction en escaliers.

3. Traiter le cas général à l'aide du théorème d'approximation.

Exercice 25.13 (★★★)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

1. On suppose que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Prouver que f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

2. On considère à présent $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

   Montrer par l'absurde que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a, b]$.

   On pourra notamment considérer des intégrales de la forme $\int_a^b f(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ *où* Q *est un polynôme de* $\mathbb{R}_n[X]$ *bien choisi.*

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 25.14 (★★)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que f et g sont égales à la fonction nulle.

Exercice 25.15 (★★)

Soit f une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe un réel k positif tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) \leq k \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est nulle.

Exercice 25.16 (★★)

Soit $f \in \mathscr{C}_m([0, +\infty[)$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. On définit F : $\begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$.

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \ell$.

Exercice 25.17 (★★)

Sans calculer les intégrales correspondantes, déterminer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_{-x}^{x} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$	(ii) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}$	(iii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$	(iv) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{1/t}}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 25.18 (★★)

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On considère la fonction F définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad F(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ et calculer sa dérivée seconde.
2. En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u$.

Exercice 25.19 (★★)

Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}.$$

On étudiera la parité, les variations, la limite en $\pm\infty$.

Exercice 25.20 (★★★)

Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sin(t)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}_f$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
4. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en $x=0$.
   On note $\tilde{f}$ la fonction ainsi prolongée.
5. Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\tilde{f}'(0)$.

Exercice 25.21 (★★★ - Une intégrale à paramètre)

Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$. Dans la suite, on fixe $x_0 > 1$.

1. Prouver que pour tout $i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, pour tout $h \in \left[\frac{1-x_0}{2}, \frac{x_0-1}{2}\right]$,

$$\left| \sqrt{x_0+h+\cos(t)} - \sqrt{x_0+\cos(t)} - \frac{h}{2\sqrt{x_0+\cos(t)}} \right| \leq \frac{h^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(\sqrt{1+x_0+2\cos(t)})^3}.$$

2. En déduire que F est dérivable sur $]1,+\infty[$, et que :

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{x+\cos(t)}}.$$

Applications des formules de Taylor

Exercice 25.22 (★)

1. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
2. Montrer que pour tout x dans $[0,\pi/2]$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Exercice 25.23 (★★)
Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|e^x - 1 - x| \leq \dfrac{x^2}{2} e^{|x|}$.

Exercice 25.24 (★★)
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Exercice 25.25 (★★)
Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient bornée. On pose $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_2 = \|f''\|_\infty$.

1. À l'aide d'une formule de Taylor, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h > 0, \quad |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$
2. En déduire que :
$$\|f'\| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Exercice 25.26 (★★★)
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

On suppose qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{\mathbb{R}} |f^{(n)}| \leq A^n n!$.

Prouver que f est nulle sur $\left]-\frac{1}{A}, \frac{1}{A}\right[$, puis qu'elle est nulle sur $\mathbb{R}$.

Sommes de Riemann

Exercice 25.27 (★★)
Déterminer les limites des suites de terme général :

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$;

(iii) $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$;

(iv) $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{2^k}$;

(v) $\displaystyle\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 25.28 (★★ - Oral Mines Ponts)
Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 25.29 (★★)
Déterminer un équivalent de $u_n = \sqrt{1}\sqrt{n-1} + \sqrt{2}\sqrt{n-2} + \cdots + \sqrt{n-2}\sqrt{2} + \sqrt{n-1}\sqrt{1}$.

Exercice 25.30 (★★)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que :

$$\varphi\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \int_a^b \varphi \circ f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 25.31 (★★★ - Intégrale de Poisson)

Donner les valeurs de a pour lesquelles $\int_0^\pi \ln\left(a^2 - 2a\cos(x) + 1\right)\,\mathrm{d}x$ est bien définie, et calculer la valeur de cette intégrale en utilisant des sommes de Riemann.

Exercice 25.32 (★★★ - Oral X)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, à valeurs strictement positives, et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe une unique subdivision $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Déterminer alors la limite, lorsque $n \to +\infty$, de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$.
