TD24

Espaces vectoriels

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Exercice 24.1 (★)

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+3y+z=0\}$;

$B = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x-y+z=0 \text{ et } x-y+z-t=0\}$;

$C = \left\{ f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \right\}$;

$D = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ monotone}\}$;

$E = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f\ 2\pi\text{-périodique}\}$;

$F = \{y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid y'' - 2y' + 2y = 0\}$;

$G = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ P = aX(X-1) + bX^2 + c(X-1) + d\}$;

$H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X+1) = 2P(X) \text{ et } P(3) = 0\}$;

$I = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = 2\}$;

$J = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\right\}$;

$K = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists k \in \mathbb{R},\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k}{n}\}$;

$L = \{\text{suites réelles bornées}\}$;

$M = \left\{ \begin{pmatrix} 2a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+2b+c & a-b \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$;

$N = \{\text{matrices nilpotentes de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\}$.

Exercice 24.2 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \mathrm{Vect}((2,3,-1),(1,-1,-2))$ et $G = \mathrm{Vect}((3,7,0),(5,0,-7))$. Montrer que $F = G$.

Exercice 24.3 (★★)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit au vecteur nul.

1. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :
$$F \cup G \text{ est un s.e.v. de } E \quad \Leftrightarrow \quad F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$
En déduire que E n'est pas une réunion de deux sous-espaces vectoriels stricts (c'est-à-dire distincts de E).

2. (★★) On suppose que E est de dimension finie et que $\mathbb{K}$ est infini (ce qui est évidemment le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Montrer que E n'est pas réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts.

Familles de vecteurs

Exercice 24.4 (★)

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées de E ?

$\mathscr{F}_1 = ((1,1,0),(0,1,1)),\ E = \mathbb{R}^3$;

$\mathscr{F}_2 = ((0,-2,1),(2,-1,-3),(1,1,-2)),\ E = \mathbb{R}^3$;

$\mathscr{F}_3 = ((1,1,0),(1,0,1),(2,1,2)),\ E = \mathbb{R}^3$;

$\mathscr{F}_4 = ((1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,1)),\ E = \mathbb{R}^3$;

$\mathscr{F}_5 = (f_1 : x \mapsto \cos x,\ f_2 : x \mapsto \sin x,\ f_3 : x \mapsto 1),\ E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$;

$\mathscr{F}_6 = (f_1 : x \mapsto |x|,\ f_2 : x \mapsto |x-1|,\ f_3 : x \mapsto |x+1|),\ E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$;

$\mathscr{F}_7 = ((X+k)^k)_{k\in[\![0,n]\!]},\ E = \mathbb{R}_n[X]$;

$\mathscr{F}_8 = ((X-a)^k(X-b)^{n-k})_{k\in[\![0,n]\!]}$ où $a \neq b$, $E = \mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 24.5 (★★)

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $f_k : x \mapsto e^{kx}$. Montrer que la famille $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 24.6 (★★)

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $v^{(k)}$ la suite définie par $v_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que $\left(v^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de E.
2. Est-ce une base de E ? Déterminer $\mathrm{Vect}\left(v^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice 24.7 (★)

1. Montrer que $\mathscr{B} = ((1,1,1),(2,1,1),(2,1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées de (a,b,c) dans cette base.
2. Mêmes questions avec $((1,-1,1),(2,1,-1),(-1,3,1))$.

Exercice 24.8 (★★★)

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. On considère $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des scalaires, et on pose $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = e_k + y$. Déterminer à quelle condition la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est libre.

Dimension

Exercice 24.9 (★)

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels de l'**Exercice 4.1**.

Exercice 24.10 (★★)

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note $u_k = (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 24.11 (★★ - ✍)

On définit l'application valuation sur $\mathbb{K}[X]$ par

$$\operatorname{val}(P) = \begin{cases} +\infty & \text{si } P = 0 \\ \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \forall k < n,\ a_k = 0\} & \text{si } P \neq 0 \end{cases}.$$

1. Montrer qu'une famille de polynômes graduée en valuation est libre.
2. Application. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $\{X^k(1-X)^{n-k},\ k \in [\![0, n]\!]\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 24.12 (★★)

1. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Déterminer une base $\mathscr{B}$ et la dimension de F.
3. Soit $P : X \mapsto 3X^4 - 8X^3 + 6X^2 - 1$. Montrer que P appartient à F, et déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 24.13 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0, n]\!]$. On pose $f_k : x \mapsto \cos(x)^k$ et $g_k : x \mapsto \cos(kx)$.

1. Montrer que $\mathscr{F} = (f_0, \dots, f_n)$ et $\mathscr{G} = (g_0, \dots, g_n)$ sont deux familles libres de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   On pourra procéder par récurrence pour la famille $\mathscr{G}$.
2. Soit $F_n = \operatorname{Vect}(f_0, \dots, f_n)$ et $G_n = \operatorname{Vect}(g_0, \dots, g_n)$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $g_k \in F_n$.
3. Montrer que $F_n = G_n$.

Exercice 24.14 (★★★)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des suites réelles p-périodiques (c'est-à-dire des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$) est un espace vectoriel, et en déterminer la dimension.

Exercice 24.15 (★★★)

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$.

1. Vérifier rapidement que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\max\limits_{A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$ et $\min\limits_{A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.

Rang

Exercice 24.16 (★)

Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $x_1 = (1, 0, 2)$, $x_2 = (-1, 2, -1)$, $x_3 = (2, 3, 0)$, $x_4 = (1, 0, -1)$, $x_5 = (2, 1, -1)$;
2. $x_1 = (1, 1, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, 0)$, $x_3 = (2, 0, 1, 1)$, $x_4 = (0, -2, 1, -1)$;
3. $P_1 = X^2 + X - 3$, $P_2 = X^2 - X - 3$, $P_3 = 2X^2 - X - 6$.

Exercice 24.17 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u = (1, 0, 2)$, $v = (1, 1, 2)$, $w = (1, 2, 2)$, $t = (2, 2, 2)$.
Montrer que (u, v, w, t) est générateur de $\mathbb{R}^3$, et en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Somme de sous-espaces

Exercice 24.18 (★★)

Montrer, dans chacun des cas suivants, que F et G sont deux-sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

1. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z + t = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1, -1, 1, -1))$;
2. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$ où $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$;
3. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$;
4. $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente$\}$, $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite nulle$\}$ et $G = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constante$\}$;
5. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \mid f \text{ paire}\}$, $G = \{g \in E \mid g \text{ impaire}\}$.

Exercice 24.19 (★★)

On considère trois sous-espaces vectoriels F, G, H d'un espace vectoriel E.

1. Comparer les sous-espaces $(F + G) \cap H$ et $(F \cap H) + (G \cap H)$.
2. Montrer que ces espaces sont égaux si $F \subset H$.

Exercice 24.20 (★★★)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A et B des sous-espaces vectoriels de E, et C un supplémentaire de $A \cap B$ dans B, c'est-à-dire tel que $(A \cap B) \oplus C = B$.

Montrer que A et C sont supplémentaires dans $A + B$.

Exercice 24.21 (★★)

Soient $E_1, \dots, E_n$ et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $E_i \subset F_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$, et :

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i.$$

Montrer que $E_i = F_i$.

Exercice 24.22 (★★)

Soit E un espace vectoriel, et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe si, et seulement si, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\left(\sum_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap F_k = \{0_E\}$.

2. Donner un exemple de trois sous-espaces vectoriels F_1, F_2, F_3 tels que pour tout $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, $i \neq j$, $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ mais où F_1, F_2, F_3 ne sont pas en somme directe.

   Est-ce que si $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{0_E\}$, alors la somme $F_1 + F_2 + F_3$ est directe ?

Exercice 24.23 (★)

Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P - (X + 1)P' = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P'(0) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$, et en donner une base et la dimension.

2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 24.24

1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y + 2z = 0\}$. Déterminer une base de F, sa dimension et un supplémentaire.

2. Mêmes questions avec $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x + iy - z = 0\}$.

Exercice 24.25 (★★★ - Matrices symétriques et antisymétriques de taille n - ✍)

Montrer que $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. En déduire que :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 24.26 (★★)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égaux à 3. On pose :

$$F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\},\ G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$$
$$\text{et } H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 24.27 (★★★)

Soit $n \geq 1$ fixé. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\}$.

1. Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$. En donner une base.
2. Montrer que la somme $F_0 + F_1 + \cdots + F_n$ est directe.
3. En déduire que $\mathbb{R}_n[X] = \displaystyle\bigoplus_{i=0}^{n} F_i$.

Exercice 24.28 (★★★)

Soit $E = \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et soient p réels $(a_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ deux à deux distincts dans $[0, 1]$. On pose :

$$F = \{f \in E \mid \forall i \in [\![1, p]\!],\ f(a_i) = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, puis déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 24.29 (★★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $G_1, \dots, G_p$ de E tels que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} G_i$ et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $G_i \subset F_i$.
