TD23

Convexité

Généralités

Exercice 23.1 (★)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair. À quelle condition $x \mapsto P(x)$ est-elle convexe sur $\mathbb{R}$?

Exercice 23.2 (★★ - Opérations sur les fonctions convexes)

1. Soient f et g deux fonctions convexes sur I. Montrer que $f+g$ est convexe sur I, et que pour tout $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)f + \lambda g$ est encore convexe.
2. Soient $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
3. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ une fonction. Montrer que si $\ln \circ f$ est convexe alors f est convexe.

Exercice 23.3 (★★)

Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une bijection convexe. Que dire de la convexité de f^{-1} ?

Exercice 23.4 (★★)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes sur un intervalle I.

1. Est-ce que $\max(f,g)$ est convexe ?
2. Est-ce que $\min(f,g)$ est convexe ?

Exercice 23.5 (★)

Étudier les variations des fonctions suivantes, leur convexité, les points d'inflexion, puis tracer leur courbe représentative.

$f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 e^x$.

$f_2 : x \mapsto e^{-x^2}$.

$f_3 : x \mapsto \sin(x) - x\cos(x)$.

Inégalités de convexité

Exercice 23.6 (★)

Établir les inégalités suivantes :

(i) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $1 - \frac{2x}{\pi} \leq \cos(x) \leq 1$.

(ii) $\forall x \in [0,1]$, $x\ln(2) \leq \ln(1+x) \leq x$.

(iii) $\forall x \in [0,1]$, $x + 1 \leq \exp(x) \leq (e-1)x + 1$.

(iv) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \in [0,1]$, $a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b$.

Exercice 23.7 (★★ - Inégalité arithmético-harmonique)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Prouver que

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Exercice 23.8 (★★)
Soient α, β, γ les angles (non orientés) d'un triangle. Montrer que :

$$\frac{1}{1+\sin(\alpha)} + \frac{1}{1+\sin(\beta)} + \frac{1}{1+\sin(\gamma)} \geq \frac{6}{2+\sqrt{3}}.$$

Exercice 23.9 (★★)

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:
$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (1+x_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:
$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 23.10 (★★ - Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des réels strictement positifs.

1. Prouver que : $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$.
2. Montrer que la même inégalité reste valable pour $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des réels quelconques (non nécessairement positifs).

Comportement des fonctions convexes

Exercice 23.11 (★★)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe strictement croissante. Prouver que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est constante.

Exercice 23.12 (★★)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f admet un minimum local en a, alors f admet un minimum global en a.
2. Que peut-on dire si f admet un maximum local en a ?
3. On suppose de plus que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $f'(a) = 0$, alors f admet un minimum global en a.

Exercice 23.13 (★★)

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et positive. Montrer que si $f(a) = f(b) = 0$, alors f est identiquement nulle.

2. En déduire qu'une fonction convexe qui possède un minimum atteint ce minimum soit en un seul point, soit en une infinité de points.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et périodique. Montrer que f est constante.

Exercice 23.14 (★★)
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$.

1. On suppose dans cette question $a = 0$ et l'asymptote $\mathscr{D}$ horizontale.

   (a) Montrer que f est décroissante. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$.

   (b) On suppose de plus f dérivable. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

2. On ne suppose plus D horizontale.

   (a) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$.

   (b) On suppose de plus f dérivable. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = a$.

Exercice 23.15 (★★★)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Prouver que f est convexe si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in I^2$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$.

Exercice 23.16 (★★★★)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction deux fois dérivable et α un réel strictement positif. On suppose que f est majorée et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f''(t) \geq \alpha^2 f(t)$.

1. Montrer que f est convexe.

2. Montrer que f' est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$.

3. (a) Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

   (b) Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.

4. (a) Montrer que la fonction $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante.

   (b) En déduire le signe de $\alpha f + f'$.

5. Montrer que pour tout réel positif t : $f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}$.