

## Polynômes

### L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

#### Exercice 20.1 (★★ - Valuation d'un polynôme - 🐞)

On définit l'application valuation sur  $\mathbb{K}[X]$  par

$$\text{val}(P) = \begin{cases} +\infty & \text{si } P = 0 \\ \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \forall k < n, a_k = 0\} & \text{si } P \neq 0 \end{cases} .$$

1. Calculer la valuation des polynômes  $X^2 + 1$ ,  $X^4 + 3X$ ,  $X^n$ .
2. Montrer que :

(i) si $P \neq 0$ , $\text{val}(P) \leq \deg(P)$ ; (ii) $\text{val}(\lambda \cdot P) = \text{val}(P)$ pour tout $\lambda \neq 0$ ;	(iii) $\text{val}(P + Q) \geq \min\{\text{val}(P), \text{val}(Q)\}$ ; (iv) $\text{val}(PQ) = \text{val}(P) + \text{val}(Q)$ .
---	--

1. La valuation d'un polynôme  $P$  non nul est le degré du monôme de plus bas degré de  $P$ . En terme de suites, c'est l'indice du premier coefficient non nul de  $P$ . Ainsi :

$$\text{val}(X^2 + 1) = 0, \text{val}(X^4 + 3X) = 1, \text{val}(X^n) = n.$$

2. (i) Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme non nul de degré  $n$ . Alors  $a_n \neq 0$  par définition du degré, et par définition de  $\text{val}(P)$ ,  $\text{val}(P) \leq n = \deg(P)$ .
- (ii) Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$ . Si  $P = 0$ , c'est immédiat. Sinon, notons  $m = \text{val}(P)$ . Par définition :

$$a_m \neq 0 \text{ et pour tout } k \leq m - 1, a_k = 0.$$

Mais alors pour tout  $\lambda \neq 0$  :

$$\lambda a_m \neq 0 \text{ et pour tout } k \leq m - 1, \lambda a_k = 0.$$

Ainsi,  $\text{val}(\lambda P) = m = \text{val}(P)$ .

- (iii) Soient  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  et  $Q = \sum_{\ell=0}^q b_\ell$ . Si l'un de ces polynômes est nul, c'est immédiat. Sinon, notons  $m = \text{val}(P)$  et  $n = \text{val}(Q)$ . Pour tout  $k < \min(m, n)$  :

$$a_k + b_k = 0 + 0 = 0$$

par définition de la valuation. Ainsi,  $\text{val}(P + Q) \geq \min(m, n) = \min(\text{val}(P), \text{val}(Q))$ .

- (iv) Soient encore  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  et  $Q = \sum_{\ell=0}^q b_\ell$ . Si l'un de ces polynômes est nul, c'est immédiat. Sinon, notons  $m = \text{val}(P)$ ,  $n = \text{val}(Q)$ , et  $P \times Q = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ . Pour tout

$k < m + n$ , on obtient (quitte à prendre pour convention que  $a_i = 0 = b_i$  lorsque  $i < 0$ ) :

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{a_i}_{=0 \text{ car } i < m} b_{k-i} + \sum_{i=m}^k a_i \underbrace{b_{k-i}}_{=0 \text{ car } k-i < n} = 0.$$

Et pour  $k = m + n$  :

$$c_k = \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{a_i}_{=0 \text{ car } i < m} b_{k-i} + a_m b_n + \sum_{i=m+1}^k a_i \underbrace{b_{k-i}}_{=0 \text{ car } k-i < n} = a_m b_n \neq 0.$$

Ainsi,  $\text{val}(P \times Q) = m + n = \text{val}(P) + \text{val}(Q)$ .

### Exercice 20.2 (★★ - Équations polynomiales)

Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que :

$$(i) \quad P'(X)^2 = 4P(X) ; \quad | \quad (ii) \quad P \circ P = P ; \quad | \quad (iii) \quad (X^2 + 1)P'' - 6P = 0.$$

### Exercice 20.3 (★★ - Formule de Vandermonde)

Soient  $m, n, r \in \mathbb{N}$ . En développant de deux manières le produit  $(1 + X)^m(1 + X)^n$ , déterminer la

valeur de  $\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$ .

Développer l'expression  $(1 + X)^{m+n} = (1 + X)^m(1 + X)^n$  à l'aide de la formule du binôme de Newton, et identifier le coefficient de  $X^r$  de chaque côtés de l'égalité.

## Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

### Exercice 20.4 (★)

Dans les deux cas suivants, calculer  $A \wedge B$  et déterminer des polynômes  $U$  et  $V$  tels que  $AU + BV = A \wedge B$ .

$$(i) \quad A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2 \text{ et } B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6.$$

$$(ii) \quad A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X \text{ et } B = 2X^4 - 4X^3 + 2X^2 - 2X + 2.$$

### Exercice 20.5 (★★)

Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}$ , le reste de la division euclidienne :

$$(i) \quad \text{de } X^n(X+1)^2 \text{ par } (X-1)(X-2) ; \quad | \quad (ii) \quad \text{de } X^n \text{ par } (X-1)^2(X+1) ; \quad | \quad (iii) \quad \text{de } (X+1)^{2n+1} - X^{2n+1} \text{ par } X^2 + X + 1.$$

### Exercice 20.6 (★★)

Soient  $a_1, \dots, a_n$  des réels. Déterminer le reste de la division de :

$$A(X) = \prod_{k=1}^n (\cos(a_k) + X \sin(a_k))^n \quad \text{par} \quad B(X) = X^2 + 1.$$

| On écrit le théorème de division euclidienne, et on évalue en  $i$  cette égalité.

### Exercice 20.7 (★★)

Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P - X$  divise  $P \circ P - X$ . En déduire les solutions  $x \in \mathbb{R}$  de :

$$(x^2 - 3x + 1)^2 = 3x^2 - 8x + 2.$$

| On commencera par montrer que  $P - X$  divise  $P \circ P - P$ , puis qu'il divise  $P \circ P - X$ .  
 Pour la seconde question, on prendra  $P = X^2 - 3X + 1$ , et on reconnaîtra l'expression  $P \circ P - X$ , qu'on peut donc factoriser par  $P - X$  dont il est plus facile de trouver les racines.

### Exercice 20.8 (★★)

Montrer que pour  $n, p \in \mathbb{N}^*$ , on a  $(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = X^{n \wedge p} - 1$ .

| On vérifiera que si  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $p$ , alors  $(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = (X^p - 1) \wedge (X^r - 1)$ . On pensera alors à l'algorithme d'Euclide.

### Exercice 20.9 (★★ - Deux questions indépendantes)

Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ .

1. Montrer que  $A \wedge B = 1$  si, et seulement si,  $(AB) \wedge (A + B) = 1$ .
2. Montrer que  $A^2 \mid B^2$  si, et seulement si,  $A \mid B$ .

### Exercice 20.10 (★★)

Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts. Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $A_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (X - a_j)$ . Montrer que les polynômes  $A_1, \dots, A_n$  sont premiers dans leur ensemble. Sont-ils premiers entre eux deux à deux ?

### Exercice 20.11 (★★★)

Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes à coefficients réels.

1. Montrer que si  $A$  divise  $B$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , alors  $A$  divise  $B$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Montrer que le PGCD de  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{C}[X]$  est égal au PGCD de  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
3. Quels sont les entiers naturels  $n$  tels que  $X^2 + X + 1$  divise  $X^{2n} + X^n + 1$  ?

1. Si  $A$  divise  $B$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , il existe  $S \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $B = AS = AS + 0$ .

Effectuons la division euclidienne de  $B$  par  $A$  dans  $\mathbb{R}[X]$  : il existe  $Q$  et  $R$  tels que  $A = BQ + R$  avec  $\deg(R) < \deg(B)$ . Et cette égalité peut être vue comme une égalité dans  $\mathbb{C}[X]$ .

Il apparait ici deux égalités qui correspondent à la division euclidienne de  $B$  par  $A$  dans  $\mathbb{C}[X]$ . Par unicité de cette division euclidienne,  $S = Q \in \mathbb{R}[X]$  (et  $R = 0$ ). Ainsi  $A$  divise  $B$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

2. Un premier argument serait de dire que l'algorithme d'Euclide dans  $\mathbb{R}[X]$  peut être vu comme un algorithme d'Euclide entre polynômes complexes, et que le dernier reste non nul qui est le PGCD dans  $\mathbb{R}[X]$  de  $A$  et  $B$ , est aussi le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide dans  $\mathbb{C}[X]$ . C'est donc aussi le PGCD dans  $\mathbb{C}[X]$  de  $A$  et  $B$ .

Une autre méthode consiste à traiter tout d'abord le cas où  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux dans  $\mathbb{R}[X]$ . Il existe alors  $U$  et  $V$  dans  $\mathbb{R}[X]$  tels que  $AU + BV = 1$ . Mais cette égalité peut être vue comme une égalité de polynômes dans  $\mathbb{C}[X]$  (toujours le même argument), et donc  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux dans  $\mathbb{C}[X]$ .

Dans le cas général, notons  $D$  le PGCD de  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{R}[X]$ . Il existe  $D$ ,  $A_1$  et  $B_1$  dans  $\mathbb{R}[X]$  tels que  $A = A_1D$ ,  $B = B_1D$  et  $A_1$  et  $B_1$  premiers entre eux dans  $\mathbb{R}[X]$ . Toutes ces égalités peuvent être vues comme des égalités de polynômes de  $\mathbb{C}[X]$ , et on vient de voir que  $A_1$  et  $B_1$  sont également premiers entre eux dans  $\mathbb{C}[X]$ . Ainsi,  $D$  est le PGCD de  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

3. Ce que nous enseigne la question précédente, c'est que la divisibilité dont il est question, a priori dans  $\mathbb{R}[X]$ , est aussi une divisibilité dans  $\mathbb{C}[X]$ . Or, dans  $\mathbb{C}[X]$ , il est aisé de tester la divisibilité : elle se lit sur les racines.

Les racines complexes de  $X^2 + X + 1$  sont  $j$  et  $\bar{j} = j^2$ . Il s'agit donc de déterminer pour quelles valeurs de  $n$   $j$  et  $j^2$  sont des racines de  $X^{2n} + X^n + 1$ . Étant conjugués, et  $X^{2n} + X^n + 1$  étant à coefficients réels, l'un sera racine si, et seulement si, l'autre l'est. On cherche donc les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $j^{2n} + j^n + 1 = 0$ .

- Si  $n \equiv 0 [3]$ , alors  $j^n = j^{2n} = 1$ , donc  $1 + j^n + j^{2n} = 3 \neq 0$ .
- Si  $n \equiv 1 [3]$ , alors  $j^n = j$ , donc  $j^{2n} = j^2$  et donc  $1 + j + j^2 = 0$ .
- Si  $n \equiv 2 [3]$ , alors  $j^n = j^2$  et  $j^{2n} = j^4 = j$ , de sorte que  $1 + j + j^2 = 0$ .

Donc  $X^2 + X + 1$  divise  $X^{2n} + X^n + 1$  si, et seulement si,  $n$  n'est pas divisible par 3.

## Racines

### Exercice 20.12 (★)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que  $X(X+1)(2X+1)$  divise  $A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ .
2. Montrer que  $(X-1)^3$  divise  $B = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ .
3. Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $C = aX^{n+1} + bX^n + 1$  admette la racine double 1. Quel est alors le quotient de  $P(X)$  par  $(X-1)^2$  ?

1. On teste si 0, 1 et  $-\frac{1}{2}$  sont racines de  $A$ .

2. On teste si 1 est racine multiple de  $B$ , soit si 1 est racine de  $B$ ,  $B'$  et  $B''$ .

3. On cherche  $a$  et  $b$  pour que  $C(1) = C'(1) = 0$ . On effectue ensuite la division euclidienne de  $P$  par  $(X-1)^2$ , ou on utilise l'algorithme de Hörner.

**Exercice 20.13 (★)**

Déterminer tous les polynômes  $P$  tels que :

$$P(2) = 6, P'(2) = 1, P''(2) = 4 \text{ et pour tout } n \geq 3, P^{(n)}(2) = 0.$$

| On pensera à la formule de Taylor.

**Exercice 20.14 (★)**

Soient  $n \geq 2$  et  $P = 1 + X + \frac{X^2}{2!} \dots + \frac{X^n}{n!} \in \mathbb{R}[X]$ .

1. Calculer  $P - P'$ .
2. Montrer que toutes les racines complexes de  $P$  sont simples.

**Exercice 20.15 (★★)**

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme unitaire dont tous les coefficients sont des entiers relatifs.

1. Prouver que toute racine rationnelle de  $P$  est dans  $\mathbb{Z}$ .
2. Soient  $k, d \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\sqrt[k]{d}$  est soit entier, soit irrationnel.

1. Soit  $r = \frac{p}{q}$  une racine rationnelle de  $P$ , avec  $p \wedge q = 1$ .

Notons alors  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ , avec  $a_i \in \mathbb{Z}$  et  $a_n = 1$ .

Alors  $0 = P(r) = \sum_{i=0}^n a_i \frac{p^i}{q^i}$ . Après multiplication par  $q^n$ , il vient donc  $p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i q^{n-i} = 0$ .

Mais  $q$  divise  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i q^{n-i}$ , et donc divise  $p^n$ . Puisque  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux,  $q$  et  $p^n$  sont premiers entre eux, donc  $q = 1$ . Et par conséquent,  $r = p \in \mathbb{Z}$ .

2.  $\sqrt[k]{d}$  est racine de  $X^k - d$ , qui est bien un polynôme unitaire à coefficients entiers. Donc soit c'est un irrationnel, soit il est rationnel, auquel cas la question 1 prouve qu'il s'agit d'un entier.

**Exercice 20.16 (★★)**

Montrer que les seuls polynômes périodiques  $P \in \mathbb{C}[X]$  (i.e. tels que il existe  $k \in \mathbb{C}^*$  tel que  $P(X+k) = P(X)$ ) sont les polynômes constants.

**Exercice 20.17 (★★)**

La fonction  $z \mapsto \bar{z}$  est-elle polynomiale ?

| Supposons qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = \bar{z}$ . Alors en particulier, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = x$ . Donc  $P - X$  s'annule en tous les réels, donc est nul. Et par conséquent,  $P = X$ . Mais alors pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  $\bar{z} = P(z) = z$ , ce qui est absurde.

Donc la fonction  $z \mapsto \bar{z}$  n'est pas polynomiale.

**Exercice 20.18 (★★)**

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

1. Supposons  $P$  scindé à racines simples sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $P'$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{R}$ .
2. Supposons  $P$  scindé sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $P'$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ .
3. Déterminer alors  $P \wedge P'$  en fonction des racines de  $P$  et de leurs multiplicité.

**Exercice 20.19 (★★)**

1. Quels sont les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que l'application  $x \in \mathbb{C} \mapsto P(x) \in \mathbb{C}$  est surjective ? injective ?
2. Quels sont les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$  ?

**Exercice 20.20 (★★★)**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $P_n = (X^2 - 1)^n$  et  $L_n = \frac{1}{2^n n!} P_n^{(n)}$ .

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $L_n$ .
2. Calculer  $L_n(1)$  et  $L_n(-1)$ .
3. Montrer que  $L_n$  admet  $n$  racines réelles distinctes appartenant à  $] -1, 1[$ .

1. Fait en cours.
2. Fait en cours.
3. Le polynôme  $P_n$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  : il admet deux racines 1 et  $-1$  de multiplicité  $n$  toutes deux. Ainsi :

$$P_n(1) = P_n(-1) = \dots = P_n^{(n-1)}(1) = P_n^{(n-1)}(-1) = 0 \text{ et } P_n^{(n)}(1), P_n^{(n)}(-1) \neq 0.$$

Appliquons le théorème de Rolle à  $P_n$  (qui est continue et dérivable) entre  $-1$  et  $1$  : il existe un réel  $a_1^{(1)} \in ] -1, 1[$  tel que  $P_n'(a_1^{(1)}) = 0$ .

Poursuivons en appliquant le théorème de Rolle à  $P_n'$  entre  $-1$  et  $a_1^{(1)}$  et entre  $a_1^{(1)}$  et  $1$  : il existe  $-1 < a_1^{(2)} < a_2^{(2)} < 1$  tels que  $P_n^{(2)}(a_1^{(2)}) = P_n^{(2)}(a_2^{(2)}) = 0$ .

Par une récurrence finie, on montre ainsi l'existence pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  de  $k$  réels  $-1 < a_1^{(k)} < \dots < a_k^{(k)} < 1$  tels que  $P_n^{(k)}(a_i^{(k)}) = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, k$ .

Pour  $k = n-1$ , on en déduit que  $P_n^{(n-1)}$  s'annule en les  $(n+1)$  réels  $-1 < a_1^{(n-1)} < \dots < a_{n-1}^{(n-1)} < 1$ . En appliquant le théorème de Rolle entre ces réels, on obtient l'existence de  $n$  réels  $a_1^{(n)} < \dots < a_n^{(n)}$  strictement compris entre  $-1$  et  $1$  qui annulent  $P_n^{(n)}$ . Puisque  $P_n^{(n)}$  est de degré  $n$ , on a ici toutes les racines de ce polynôme, qui sont donc réelles, toutes simples et strictement comprises entre  $-1$  et  $1$ .

**Exercice 20.21 (★★★)**

Quels sont les polynômes  $P$  de  $\mathbb{C}[X]$  tels que  $P'$  divise  $P$  ?

Il est évident que les polynômes constants conviennent.

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non constant, tel que  $P'$  divise  $P$ . Alors  $P$  est scindé, notons  $n$  le nombre de ses racines distinctes, notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ces racines et  $m_1, \dots, m_n$  leur multiplicités. On a alors  $P = \alpha \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{m_i}$ , avec  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ . On a donc  $\sum_{i=1}^n m_i = \deg P$ .

Puisque  $P'$  divise  $P$ , toutes les racines de  $P'$  sont racines de  $P$ . Autrement dit, les racines de  $P'$  sont parmi  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Or nous savons que  $\lambda_i$  est racine de  $P'$ , de multiplicité  $m_i - 1$  (avec cette multiplicité éventuellement nulle si  $\lambda_i$  n'est pas racine de  $P'$ ). Et donc  $\sum_{i=1}^n (m_i - 1) = \deg P'$ .

Soit encore  $\sum_{i=1}^n m_i - n = \deg P - 1 \Leftrightarrow n = 1$ .

Autrement dit,  $P$  possède une unique racine, et donc est de la forme  $P = \alpha(X - \lambda)^k$ .

### Exercice 20.22 (★★★ - D'après Centrale-Supélec)

Le but de cet exercice est de résoudre dans  $\mathbb{C}[X]$  l'équation

$$P(X^2) = P(X)P(X - 1).$$

1. Montrer que si  $P$  est un polynôme non nul vérifiant cette relation, alors l'ensemble de ses racines est contenu dans  $\{0, -1, j, j^2\}$ .
2. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation.

1. Si  $P$  est constant, c'est immédiat. Sinon,  $P$  a au moins une racine  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Alors  $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha - 1) = 0$ , et par récurrence immédiate,  $\alpha^{2^n}$  est racine de  $P$  pour tout  $n$ .

Si  $|\alpha| \neq 0, 1$ , alors  $P$  admettrait une infinité de racines, ce qui est impossible si  $P$  n'est pas le polynôme nul. Ainsi  $|\alpha| = 0$  ou  $1$ .

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  une racine non nulle de  $P$ , donc de module 1 d'après ce qui précède. En évaluant en  $1 + \alpha$ , on obtient  $P((1 + \alpha)^2) = P(1 + \alpha)P(\alpha) = 1$ . Donc  $(1 + \alpha)^2$  est racine de  $P$ . Par ce qui a été fait précédemment, soit  $1 + \alpha = 0$  et alors  $\alpha = -1$ , soit  $|1 + \alpha| = 1$  et alors  $\alpha$  appartient à l'intersection du cercle unité et du cercle de centre  $-1$  et de rayon 1, c'est-à-dire  $\alpha = j$  ou  $j^2$ .

Finalement, l'ensemble des racines complexes de  $P$  est contenu dans  $\{0, 1, j, j^2\}$ .

2. Soit toujours  $P$  une solution de l'équation proposée dans  $\mathbb{C}[X]$ . D'après le théorème de décomposition en produits d'irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ , et étant donné la question précédente,  $P$  se décompose, de manière unique à l'ordre près des facteurs, sous la forme :

$$P = \lambda X^\alpha (X + 1)^\beta (X - j)^\gamma (X - j^2)^\delta.$$

où  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  et  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$ . On en déduit les décompositions suivantes (en se souvenant que  $1 + j + j^2 = 0$  et  $j = j^4$ ) :

$$P(X)P(X - 1) = \lambda^2 X^{\alpha+\beta} (X - 1)^\alpha (X + 1)^\beta (X + j^2)^\gamma (X - j^2)^\delta (X - j)^\gamma (X + j)^\delta,$$

$$P(X^2) = \lambda X^{2\alpha} (X - i)^\beta (X + i)^\beta (X - j^2)^\gamma (X + j^2)^\gamma (X - j)^\delta (X + j)^\delta.$$

Par unicité, il vient :

$$\begin{cases} \lambda^2 = \lambda \\ \alpha + \beta = 2\alpha \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = \delta \end{cases} .$$

Ainsi,  $P = ((X - j)(X - j^2))^\gamma = (X^2 + X + 1)^\gamma$ .

Réciproquement, on vérifie sans difficulté que les polynômes de la forme  $P = (X^2 + X + 1)^\gamma$  avec  $\gamma \in \mathbb{N}$  conviennent bien.

Ainsi, les polynômes solutions de l'équation proposée sont exactement les polynômes  $(X^2 + X + 1)^\gamma$  avec  $\gamma \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 20.23 (★★★)

Soient  $m, n$  deux entiers supérieurs ou égaux à 2, premiers entre eux. Montrer que  $(X^m - 1)(X^n - 1)$  divise  $(X^{mn} - 1)(X - 1)$ .

Ce résultat reste-t-il vrai si  $m$  et  $n$  ne sont pas premiers entre eux ?

Les racines de  $X^n - 1$  (resp.  $X^m - 1$ ) sont les racines  $n^{\text{èmes}}$  (resp.  $m^{\text{èmes}}$ ) de l'unité.

Mais  $m, n$  étant premiers entre eux, il existe deux entiers  $p$  et  $q$  tels que  $np + mq = 1$ . Et alors si  $z \in \mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$ , alors  $z = z^1 = z^{np+mq} = (z^n)^p (z^m)^q = 1$ . Autrement dit,  $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \{1\}$ .

Ainsi,  $(X^n - 1)(X^m - 1)$  possède  $n + m - 1$  racines simples (qui sont les éléments différents de 1 de  $\mathbb{U}_m \cup \mathbb{U}_n$ ) et une racine double, qui est 1.

D'autre part, 1 est racine  $mn^{\text{ème}}$  de l'unité, donc racine de  $X^{mn} - 1$ , et donc racine au moins double de  $(X^{mn} - 1)(X - 1)$ . De plus, si  $z \in \mathbb{U}_m$ , alors  $z^{mn} = (z^m)^n = 1^n = 1$ , donc  $z \in \mathbb{U}_{mn}$ . Et de même si  $z \in \mathbb{U}_n$ .

Ainsi, toutes les racines simples de  $(X^n - 1)(X^m - 1)$  sont racines de  $(X^{mn} - 1)$ . Et ce dernier polynôme est divisible par

$$(X - 1)^2 \prod_{z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (X - z) \prod_{z \in \mathbb{U}_m \setminus \{1\}} (X - z) = \prod_{z \in \mathbb{U}_n} (X - z) \prod_{z \in \mathbb{U}_m} (X - z) = (X^n - 1)(X^m - 1).$$

Ce résultat ne vaut plus si  $m$  et  $n$  ne sont plus premiers entre eux : par exemple, pour  $m = 2$  et  $n = 4$ ,  $-1$  est racine de  $X^2 - 1$  et de  $X^4 - 1$ , donc est racine double de  $(X^2 - 1)(X^4 - 1)$ , alors qu'il n'est que racine simple de  $X^8 - 1$ . Donc  $(X^2 - 1)(X^4 - 1)$  ne divise pas  $(X - 1)(X^8 - 1)$ .

## Factorisation

### Exercice 20.24 (★)

- Factoriser  $A(X) = X^5 + X$  en produit d'irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$
- Trouver la décomposition de  $A(X) = X^6 + 1$  en produit de polynômes irréductibles et unitaires de  $\mathbb{R}[X]$ .

### Exercice 20.25 (★)

Soit le polynôme  $P(X) = X^4 + (-4 + 2i)X^3 + (12 - 8i)X^2 + (4 + 26i)X - 13$ .

1. Montrer que  $-i$  est une racine de  $P$ . Préciser son ordre de multiplicité.
2. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 20.26 (★★)**

Montrer que  $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$  possède  $j$  comme racine double. En déduire sa factorisation irréductible sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

On a :

$$P(j) = j^8 + 2j^6 + 3j^4 + 2j^2 + 1 = j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 = 3(j^2 + j + 1) = 0.$$

Donc  $j$  est racine de  $P$ . Par ailleurs,  $P' = 8X^7 + 12X^5 + 12X^3 + 4X$ , et donc

$$P'(j) = 8j^7 + 12j^5 + 12j^3 + 4j = 8j + 12j^2 + 12 + 4j = 12(j^2 + j + 1) = 0$$

Donc  $j$  est racine de multiplicité au moins 2 de  $P$ . Notons que si  $j$  est racine double, alors  $\bar{j}$  l'est aussi. Donc on a déjà 4 racines comptées avec multiplicité parmi les 8 que compte  $P$ .

Puisque  $P$  est pair,  $-j$  est aussi racine de  $P$ . Et même  $-j$  est racine double, puisque si  $P$  est pair, alors  $P'$  est impair, et donc si  $x$  est racine de  $P'$ ,  $-x$  l'est aussi. Mais si  $-j$  est racine double, alors  $-\bar{j} = -\bar{j} = -j^2$  l'est aussi.

Donc nous avons bien un total de 8 racines lorsque comptées avec leurs multiplicités. Donc  $P = 1(X - j)^2(X - \bar{j})^2(X + j)^2(X + \bar{j})^2$  est la décomposition en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ .

Puisque  $(X - j)(X - \bar{j}) = X^2 + X + 1$  et  $(X + j)(X + \bar{j}) = X^2 - X + 1$ , la décomposition de  $P$  en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  est donc  $P = (X^2 + X + 1)^2(X^2 - X + 1)^2$ .

**Exercice 20.27 (★★)**

Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $P = X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$  où  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 20.28 (★★)**

Soit  $n$  un entier strictement positif. Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme

$$P = (X + 1)^n - (X - 1)^n.$$

En déduire que  $\prod_{k=1}^p \cotan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$ .

**Exercice 20.29 (★★)**

On considère le polynôme  $P = (X + 1)^n - e^{2in\theta} \in \mathbb{C}[X]$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .

1. Déterminer ses racines et sa factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$ .

2. En déduire la valeur des produits  $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$  et  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

**Exercice 20.30 (★★ - Polynômes de Tchebychev - 📖)**

On étudie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  les polynômes  $T_n \in \mathbb{R}[X]$  qui vérifient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

1. Montrer que si  $T_n$  existe, alors il est unique.
2. Vérifier que  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = X$  et  $P_2 = 2X^2 - 1$ .
3. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n$  existe et vérifie la relation  $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$ .
4. Déterminer la parité de  $T_n$ , son degré ainsi que son coefficient dominant.
5. Déterminer l'ensemble des racines de  $T_n$ , et en déduire sa décomposition en produits d'irréductibles.
6. En déduire que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

7. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$(x^2 - 1)T_n''(x) + xT_n'(x) = n^2T_n(x).$$

**Exercice 20.31 (★★)**

Résoudre les systèmes suivants d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  :

$$\mathcal{S}_1 \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ xyz = -2 \end{cases} \quad ; \quad \left| \quad \mathcal{S}_2 \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases} \right.$$

**Exercice 20.32 (★★)**

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n \geq 0$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on note  $s_k$  la somme des racines (comptées avec multiplicité) de  $P^{(k)}$ .

Montrer que  $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$  est une progression arithmétique dont on précisera la raison.

**Exercice 20.33 (★★★★)**

Soit  $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . Calculer  $\prod_{\substack{0 \leq k, \ell \leq n-1 \\ k \neq \ell}} (\zeta^k - \zeta^\ell)$ .

Il s'agit de calculer

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^{n-1} (\zeta^k - \zeta^\ell) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \zeta^k (1 - \zeta^{\ell-k}) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \left( \left( \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n-1} \zeta^k \right) \left( \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^{n-1} (1 - \zeta^{\ell-k}) \right) \right) \end{aligned}$$

Or,  $\{\zeta^{\ell-k}, 0 \leq \ell \leq n-1, \ell \neq k\} = \mathbf{U}_n \setminus \{1\}$ , d'où :

$$\prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^{n-1} (X - \zeta^{\ell-k}) = 1 + X + \dots + X^{n-1}$$

et donc  $\prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^{n-1} (1 - \zeta^{\ell-k}) = n$ . Donc :

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} (n \zeta^{k(n-1)}) = n^n \prod_{k=0}^{n-1} \zeta^{-k} = n^n \zeta^{-(0+1+\dots+(n-1))} = n^n \zeta^{-\frac{n(n-1)}{2}} = n^n e^{-i(n-1)\pi} = (-1)^{n-1} n^n.$$

## Polynômes de Lagrange

### Exercice 20.34 (★★)

Soient  $n \geq 2$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  distincts et  $L_1, \dots, L_n$  les polynômes de Lagrange associés. Simplifier les sommes  $\sum_{i=1}^n L_i$  et  $\sum_{i=1}^n x_i L_i$ .

### Exercice 20.35 (★★)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tels que pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P\left(\frac{k}{n}\right)$ .

### Exercice 20.36 (★★★)

Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ ,  $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ .

## Fractions rationnelles

### Exercice 20.37

Décomposer en éléments simples :

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{X^3}{X^2 - 3X + 2} \text{ dans } \mathbb{R}[X] ; \\ F_2 &= \frac{X^3 + X^2 + 1}{X^3 + X^2 + X} \text{ dans } \mathbb{C}[X] ; \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F_3 &= \frac{X}{X^3 - 1} \text{ dans } \mathbb{R}[X] ; \\ F_4 &= \frac{1}{(X^2 + 1)(X^2 + X + 2)} \text{ dans } \mathbb{R}[X]. \end{aligned}$$

### Exercice 20.38 (★★ - Un air de déjà vu)

En utilisant la décomposition en éléments simples de  $\frac{P'}{P}$ , déterminer tous les polynômes  $P$  de  $\mathbb{C}[X]$  tels que  $P' \mid P$ .

### Exercice 20.39 (★★)

Montrer que  $\sum_{\omega \in \mathbf{U}_7} \frac{1}{2 - \omega} = \frac{448}{127}$ .

**Exercice 20.40 (★★)**

Soit  $n \geq 2$ . Donner la forme irréductible de la fraction  $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^2}{X - \omega}$ .

**Exercice 20.41 (★★ - Dérivée d'une fraction rationnelle)**

1. Soit  $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ . Montrer que la fraction rationnelle  $\frac{A'B - AB'}{B^2}$  ne dépend pas du choix du représentant  $(A, B)$  de  $R$ .

On appelle *dérivée de  $R$* , et on note  $R'$  la fraction rationnelle  $\frac{A'B - AB'}{B^2}$ .

2. Montrer que pour tous  $R, S \in \mathbb{K}(X)$ ,  $(R + S)' = R' + S'$ ,  $(RS)' = R'S + RS'$  et si  $S$  est non nulle,  $\left(\frac{R}{S}\right)' = \frac{R'S - RS'}{S^2}$ .
3. Étudier le degré de  $F'$  en fonction de celui de  $F$ .
4. Montrer qu'il n'existe pas de fraction  $F$  de  $\mathbb{K}(X)$  vérifiant  $F' = 1/X$ .

**Exercice 20.42 (★★★★ - Grand théorème de Fermat pour les polynômes (Oral ENS Cachan))**

1. Soient  $A, B, C$  trois polynômes de  $\mathbb{C}[X]$ , non constants, premiers entre eux dans leur ensemble, et tels que  $A + B = C$ . On note  $m$  le nombre de racines distinctes de  $ABC$ . Montrer que  $A \left(\frac{A'}{A} - \frac{C'}{C}\right) = B \left(\frac{C'}{C} - \frac{B'}{B}\right)$ . En déduire que  $\max(\deg A, \deg B, \deg C) < m$ .
2. Soit  $n \geq 3$ . Montrer que s'il existe trois polynômes  $P, Q, R$  de  $\mathbb{C}[X]$  tels que  $P^n + Q^n = R^n$ , alors  $P, Q$  et  $R$  sont associés.