TD19

Analyse asymptotique

Relations de comparaison : cas des suites

Exercice 19.1 (★)

Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{2}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{n}} - o\left(e^{-n}\right) - \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.
2. $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$.
3. $w_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) + n^2 + o(n\sqrt{n}) + n\ln(n)\sqrt{n} + o\left(n^2\ln(\ln n)\right)$.

Exercice 19.2 (★★)

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si (u_n) est bornée et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(u_n\right)$, alors (v_n) est bornée.
2. Si (u_n) converge et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(u_n\right)$, alors (v_n) converge.
3. Si (u_n) converge vers 0 et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(u_n\right)$, alors (v_n) converge vers 0 .
4. Si (u_n) est bornée et si $v_n = o(u_n)$, alors (v_n) converge.
5. Si $u_n = (2n-1)^3$, alors :

   ☐ $u_n = o(n^3)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^3$ ☐ $u_n = o(n^4)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$ ☐ $u_n = o\left(\frac{n^4}{2}\right)$
6. Si $u_n = \frac{2}{n} - \frac{3}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}$, alors :

   ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ ☐ $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ☐ $\frac{1}{n} = o(u_n)$ ☐ $u_n = \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$ ☐ $u_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$
7. Soit (u_n) une suite réelle. Alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
8. Soient (u_n), (v_n), (a_n), (b_n) des suites telles que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(a_n)$ et $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$.

   ☐ si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $u_n + v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$ ☐ si $a_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$, alors $u_n + v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$.
9. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors :

   ☐ $u_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + 1$ ☐ $2u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ☐ $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$ ☐ $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$ ☐ $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$

   ☐ $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$ ☐ $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$

Exercice 19.3 (★★)

Trouver un équivalent simple des suites :

$$a_n = \exp\left(\frac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1,$$

$$b_n = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right),$$

$$c_n = \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n^3+1}},$$

$$d_n = n(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{5}),$$

$$e_n = (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}},$$

$$f_n = (n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}},$$

$$g_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n},$$

$h_n = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2^n}\right)\right)$, $\quad i_n = \frac{\exp\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right)-e}{\exp\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(n+1+\frac{1}{n}\right)}$, $\quad j_n = e^{\arccos\left(\frac{1}{n}\right)} - e^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 19.4 (★★)
Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} k!$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$.

Exercice 19.5 (★★)
Soit (u_n) une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Donner un équivalent simple de (u_n).

Exercice 19.6 (★★)
Déterminer un équivalent simple de $u_n = \sqrt{n}^n + n^{\sqrt{n}} + n^{n/2}$.

Exercice 19.7 (★★)
Déterminer les limites des suites suivantes :

$$a_n = \frac{3n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n^2+2} + \ln(n)}$$

$$b_n = \frac{n\sin(n)}{1+n^2}$$

$$c_n = \sqrt[n]{n}$$

$$d_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$$

$$e_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$f_n = n\sqrt{\ln\left(1 + \frac{2}{n^2+1}\right)}$$

$$g_n = \frac{\mathrm{ch}(\mathrm{sh}(n))}{\mathrm{sh}(\mathrm{ch}(2n))}$$

$$h_n = n\left(e^{\arccos\left(\frac{1}{n}\right)} - e^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$i_n = n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

Exercice 19.8 (★★)
Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2}$.

Exercice 19.9 (★★)
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$.

Exercice 19.10 (★★★ - Développement asymptotique d'une suite implicite)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution strictement positive que l'on notera u_n.
2. Montrer que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.
3. Prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

Exercice 19.11 (★★★ - Un autre développement asymptotique d'une suite implicite)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ que l'on notera x_n. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
3. Montrer que $x_n - n\pi \sim \frac{\pi}{2}$.

4. Montrer que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$.
5. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 19.12 (★★★★ - Oral Polytechnique)
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Déterminer un équivalent de (u_n).
On rappelle pour cela que si une suite $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (théorème de Cesàro).

Relations de comparaison : cas des fonctions

Exercice 19.13 (★★)
Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes :

(i) $\dfrac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3}$ en 0,

(ii) $\ln(\cos(x))$ en 0,

(iii) $\ln(\sin(x))$ en 0,

(iv) $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ en 0,

(v) $x^2\ln(1+x)+x\cos(x)$ en $+\infty$,

(vi) $\dfrac{\ln(x)}{1-x^2}$ en 1,

(vii) $\dfrac{xe^x-x^2}{\mathrm{ch}(x)}$ en $+\infty$,

(viii) $\dfrac{\tan(x-x\cos(x))}{\sin(x)+\cos(x)-1}$ en 0,

(ix) $(\ln(1+x))^2-(\ln(1-x))^2$ en 0,

(x) $\cos(ax)-\cos(bx)$ en 0.

Exercice 19.14 (★★)
Calculer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(x)\ln(1+\ln(1+x))$;

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+\tan(x))^{1/\sin(x)}$;

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x)}{x^x-1}$;

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln(x)}$;

(v) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln((\sin(x))^2)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$;

(vi) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x)\tan(2x)$;

(vii) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$;

(viii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+x+1}$;

(ix) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)-\sqrt{1+x}+1}{\cos(x)-e^x}$;

(x) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$.

Exercice 19.15 (★★)
Soit $f : x \mapsto \frac{x^2}{x+1}\mathrm{Arctan}(x)$. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote que l'on déterminera au voisinage de $+\infty$.

Exercice 19.16 (★★)
Soit $f(x) = x\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)}\right)$.

1. Prouver que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$.

2. En déduire la limite en $+\infty$ de $\left(e^{f(x)}-1\right)\ln(x)$.

3. Soit $g(x)=\left[\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x-1\right]\ln(x)$. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Exercice 19.17 (★★)

Déterminer les limites en 0^+ des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x^x \quad ; \quad g : x \mapsto x^{f(x)} \quad ; \quad h : x \mapsto x^{g(x)}.$$
