

Structures algébriques

Lois de compositions internes

Exercice 18.1 (★)

On pose pour tous $x, y \in [0, 1] \times [0, 1]$:

$$x \star y = x + y - xy$$

1. Montrer que $\star$ définit une loi de composition interne commutative et associative sur $[0, 1]$ avec élément neutre.
2. Quels sont les éléments inversibles de $([0, 1], \star)$?

Exercice 18.2 (★★)

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble totalement ordonné. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$, $\max(x, y)$ est bien défini. On définit ainsi une loi de composition interne, notée $\max$ sur E .

1. Montrer que la loi $\max$ est associative et commutative.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(E, \max)$ possède un élément neutre.
3. Lorsque cette condition est vérifiée, quels sont les éléments inversibles de E ?

Groupes

Exercice 18.3 (★★)

1. Soient $(G, \cdot)$ un groupe, M un ensemble et φ une bijection de G sur M .

On définit une loi interne $\star$ sur M en posant pour tout $(x, y) \in M^2$: $x \star y = \varphi(\varphi^{-1}(x) \cdot \varphi^{-1}(y))$.

Montrer que $(M, \star)$ est un groupe.

2. Montrer que φ est un isomorphisme de $(G, \cdot)$ sur $(M, \star)$.

3. On pose pour tout $(x, y) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^2$: $x \oplus y = \frac{x + y}{1 - xy}$.

Montrer que $\oplus$ est une loi interne sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que $(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \oplus)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 18.4 (★★)

Dans chacun des cas suivants, déterminer si H est ou non un sous-groupe de G .

(i) $G = (\mathbb{C}^*, \times)$, $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$.	sont dans $\mathbb{Z}$.
(ii) $G = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, H l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de G .	(iv) $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$, H l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux valent 1.
(iii) $G = \text{GL}_2(\mathbb{R})$, H l'ensemble des éléments de G dont tous les coefficients	(v) $G = \mathfrak{S}_n$, $H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) = 2\}$.

Exercice 18.5 (★★)

Dans cet exercice, on note G l'ensemble des similitudes directes du plan, qu'on assimile à l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telles qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$.

1. Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe, et qu'il n'est pas abélien.
2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On pose $G_{z_0} = \{g \in G \mid g(z_0) = z_0\}$.
Montrer que G_{z_0} est un sous-groupe de G , isomorphe à $\mathbb{C}^*$. Est-il abélien ?
3. L'ensemble des rotations du plan est-il un groupe pour la composition ? Déterminer le plus petit sous-groupe de G contenant les rotations du plan.
Même question avec les homothéties du plan.

Exercice 18.6 (★★ - Centre d'un groupe - 📌)

Soit $(G, *)$ un groupe. On appelle centre de G l'ensemble :

$$\mathcal{Z}(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G, x * y = y * x\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{Z}(G)$ est un sous-groupe de G . À quelle condition a-t-on $\mathcal{Z}(G) = G$?
2. Montrer que $\mathcal{Z}(\mathfrak{S}_n)$ est réduit à $\{\text{id}\}$ lorsque $n \geq 3$. Que dire si $n = 1$ ou $n = 2$?
3. Déterminer $\mathcal{Z}(\text{GL}_n(\mathbb{K}))$ lorsque $n \geq 2$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Que dire si $n = 1$?

Indication : on pensera à utiliser les matrices d'opérations élémentaires.

Exercice 18.7 (★★ - Union de sous-groupes)

1. Donner un exemple de deux sous-groupes de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dont l'union n'est pas un sous-groupe.
2. Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G . Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe si, et seulement si, $H \subset K$ ou $K \subset H$.
3. Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une union croissante de sous-groupes de G . Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ est un sous-groupe de G .

Exercice 18.8 (★★ - Sous-groupes de $\mathbb{Z}$ - 📌)

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble $n\mathbb{Z} = \{nk, k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
2. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$.

- (a) Justifier l'existence du minimum n_0 de l'ensemble $E = \{h \in H \mid h > 0\}$.
- (b) Montrer que $n_0\mathbb{Z} \subset H$.
- (c) Soit $h \in H$. En considérant la division euclidienne de h par n_0 , montrer que $h \in n_0\mathbb{Z}$.
- (d) Que peut-on en conclure sur les sous-groupes de $\mathbb{Z}$?
3. Soit $(G, *)$ un groupe fini d'élément neutre e , et $a \in G$.
- (a) Montrer que l'application $\varphi_a : p \in \mathbb{Z} \mapsto a^p \in G$ est un morphisme de groupes.
- (b) En déduire l'existence et l'unicité d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :
$$\begin{cases} a^n = e, \\ \forall p \in \mathbb{Z}, a^p = e \Leftrightarrow n \mid p \end{cases}.$$

Exercice 18.9 (★★ - Un cas particulier du théorème de Lagrange -)

Soit G un groupe commutatif fini, de cardinal n .

1. Soit $g \in G$. Montrer que $x \mapsto gx$ est une bijection de G sur lui-même.
2. Soit $g \in G$. En calculant de deux manières le produit $\prod_{x \in G} (gx)$, montrer que $g^n = 1_G$.
3. Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 18.10 (★★ - Automorphismes intérieurs -)

Soit G un groupe multiplicatif. Pour $a \in G$, on note $f_a : x \in G \mapsto a x a^{-1} \in G$.

1. Montrer que pour tout $a \in G$, f_a est un automorphisme de G .
2. Montrer que $\varphi : a \in G \mapsto f_a \in \text{Aut}(G)$ est un morphisme de groupes.
3. Déterminer le noyau de φ .

Exercice 18.11 (★★)

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$, puis de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 18.12 (★★★★)

Les groupes suivants sont-ils isomorphes :

- | | |
|--|--|
| (i) $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$; | (iv) $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ (où $n \geq 1$) ; |
| (ii) $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$; | (v) $\mathfrak{S}_X$ et $\mathfrak{S}_Y$ lorsque X et Y sont en bi- |
| (iii) $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$; | jection. |

Exercice 18.13 (★★★★)

Soient G un groupe, H et K deux sous-groupes de G . On pose $HK = \{h * k, h \in H, k \in K\}$.

1. Si G est abélien, montrer que HK est un sous-groupe de G .
2. Prouver que HK est un sous-groupe de G si, et seulement si, $HK = KH$.

3. Si H et K sont finis et si $H \cap K = \{e\}$ (où e désigne l'élément neutre de G), montrer que $\text{Card}(HK) = \text{Card}(H) \cdot \text{Card}(K)$.

Exercice 18.14 (★★★)

Soit G un groupe non réduit à un élément tel que pour tout $g \in G$, $g^2 = e$.

1. Montrer que G est abélien.
2. Montrer que G possède au moins un sous-groupe de cardinal 2.
3. On suppose que G contient au moins trois éléments. Soit H un sous-groupe fini de G , différent de $\{e\}$ ou de G , et soit $g \in G \setminus H$. On pose alors $gH = \{gh, h \in H\}$.
 - (a) Montrer que $H \cup gH$ est un sous-groupe de cardinal $2|H|$.
 - (b) Montrer que si G est fini, alors son cardinal est une puissance de 2.

Exercice 18.15 (★★★)

1. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.
 - (a) Montrer l'existence de $a = \inf\{h \in H \mid h > 0\}$.
 - (b) Montrer que si $a > 0$, alors $H = a\mathbb{Z}$.
 - (c) Montrer que si $a = 0$, alors H est une partie dense de $\mathbb{R}$.
2. *Application.* On admet que π est irrationnel. Prouver que l'ensemble $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que l'ensemble $A = \{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 18.16 (★★★)

Soit G un groupe possédant exactement deux sous-groupes. Montrer qu'il existe $x \in G$ tel que $G = \langle x \rangle$, que G est fini, et que son cardinal est premier.

Exercice 18.17 (★★★)

Soit $(G, *)$ un groupe, et soit A une partie non vide **finie** de G , stable par $*$. Prouver que A est un sous-groupe de G .

18.1 Anneaux, corps

Exercice 18.18 (★)

On note A l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, a et b décrivant $\mathbb{Z}$.

Montrer que A est un anneau pour les lois d'addition et de multiplication matricielles, puis déterminer $\mathcal{U}(A)$.

Exercice 18.19 (★★)

L'anneau $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$ est-il intègre ? Déterminer $\mathcal{U}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$.

Exercice 18.20 (★★)

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ fixé. On pose $A = \left\{ \frac{p}{a^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ et déterminer $\mathcal{U}(A)$.
2. Expliciter $\mathcal{U}(A)$ dans les cas $a = 2$ puis $a = 10$.

Exercice 18.21 (★★)

1. On rappelle que $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, $|z|^2 \in \mathbb{N}$, puis en déduire $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[i])$.

2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + ib\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, puis déterminer $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[i\sqrt{2}])$.

Exercice 18.22 (★★ - Produit direct d'anneaux)

Soient $(A, +_A, \times_A)$ et $(B, +_B, \times_B)$ deux anneaux. On munit $A \times B$ de deux lois de composition $\oplus$ et $\otimes$ définies par :

$$(a, b) \oplus (a', b') = (a +_A a', b +_B b') \text{ et } (a, b) \otimes (a', b') = (a \times_A a', b \times_B b')$$

Montrer que $(A \times B, \oplus, \otimes)$ est un anneau, commutatif si A et B le sont. Cet anneau est-il intègre ?

Exercice 18.23 (★★)

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-anneaux de $\mathbf{R}^{\mathbb{N}}$, l'anneau des suites réelles ?

- | | |
|---|--|
| (i) l'ensemble des suites de limite nulle ; | (vi) l'ensemble des suites (u_n) telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$; |
| (ii) l'ensemble des suites croissantes ; | |
| (iii) l'ensemble des suites convergentes ; | (vii) l'ensemble des suites stationnaires ; |
| (iv) l'ensemble des suites divergentes ; | (viii) l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. |
| (v) l'ensemble des suites bornées ; | |

Exercice 18.24 (★★)

Soit A un anneau. Un élément $x \in A$ est dit *nilpotent* si $x^p = 0_A$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Le cas échéant, le plus petit entier p qui satisfait cette relation est appelé l'indice de nilpotence de x .

1. Montrer que si A est intègre, 0_A est le seul élément nilpotent de A .
2. Montrer que la somme et le produit de deux éléments nilpotents de A qui commutent sont encore nilpotents.
3. Pour tout $x \in A$ nilpotent, montrer que $1_A - x$ est inversible et déterminer $(1_A - x)^{-1}$.

Exercice 18.25 (★★)

Soit A un anneau de Boole, i.e. un anneau non nul pour lequel $x^2 = x$ pour tout $x \in A$.

1. Montrer que A est commutatif.
2. Déterminer A dans le cas où A est intègre.
3. On définit une relation binaire $\preceq$ sur A en posant pour tous $x, y \in A$: $x \preceq y \iff yx = x$.
Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.

Exercice 18.26 (★★★★)

Prouver que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un corps et déterminer tous ses automorphismes.

Exercice 18.27 (★★★★)

Montrer qu'un anneau commutatif intègre fini est un corps.

Exercice 18.28 (★★★★★ - Idéaux premiers (d'après oral ENS))

Soit A un anneau commutatif non nul. On appelle idéal de A tout sous-groupe I de $(A, +)$ tel que $\forall (a, x) \in A \times I, ax \in I$.

1. Montrer que pour tout $x \in A, xA = \{ax, a \in A\}$ est un idéal de A .
2. Un idéal I est dit *maximal* si tout idéal de A , différent de A , et qui contient I est égal à I lui-même.

Un idéal I différent de A est dit *premier* si : $\forall (a, b) \in A^2, ab \in I \Rightarrow a \in I$ ou $b \in I$.

- (a) Montrer qu'un idéal I est maximal si, et seulement si, pour tout $x \in A \setminus I, I + xA = A$ (où $I + aA$ est l'ensemble des éléments qui s'écrivent comme somme d'un élément de I et d'un élément de aA).
 - (b) Prouver qu'un idéal maximal est premier.
3. Montrer que A est un corps si, et seulement si, tout idéal de A autre que A est premier.