TD13

Nombres réels

Bornes supérieures et inférieures

Exercice 13.1 (★)
Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides, avec B majorée et $A \subset B$.
Montrer que A admet une borne supérieure, et que $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Exercice 13.2 (★★)
Montrer que les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont bornées. Déterminer leurs bornes inférieures et supérieures :

$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$B = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p},\ (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, n \leq p\right\}$$

$$C = \left\{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$D = \{\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Exercice 13.3 (★★)
Soient A et B deux parties non vides minorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cup B$ est minorée, et montrer que $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.
2. Montrer que si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $\max(\inf(A), \inf(B)) \leq \inf(A \cap B)$. Est-ce une égalité ?

Exercice 13.4 (★)
Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \cap J \neq \emptyset$, montrer que $I \cup J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 13.5 (★★)
Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux éléments. On suppose que $x \in A$ et $x \neq \sup(A)$. Montrer que $\sup(A \backslash \{x\}) = \sup(A)$.

Exercice 13.6 (★★)
Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$, et soit $M = \sup(A)$. On suppose que $M \notin A$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]M - \varepsilon, M[$ contient une infinité d'éléments de A.
Ce résultat reste-t-il vrai si $M \in A$?

Exercice 13.7 (★★)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit deux fonctions g et h sur $\mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \inf\{f(y),\ y \geq x\} \quad \text{et} \quad h(x) = \sup\{f(y),\ y \geq x\}.$$

Montrer que g et h sont bien définies, que $g \leq h$, et étudier les monotonies de g et h.

Exercice 13.8 (Parties adjacentes de $\mathbb{R}$ - ★★★)

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leq b \ \text{ et } \ \forall \varepsilon > 0,\ \exists (a,b) \in A \times B,\ b - a < \varepsilon.$$

Montrer que A admet une borne supérieure, B admet une borne inférieure et $\sup(A) = \inf(B)$.

Exercice 13.9 (★★★)

Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$. On appelle diamètre de A et on note $\delta(A)$ le réel

$$\sup\{|x-y|,\ (x,y) \in A^2\}.$$

1. Justifier l'existence de $\delta(A)$, puis montrer que $\delta(A) \leq \sup(A) - \inf(A)$.
2. Montrer que : $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists (x,y) \in A^2,\ |x-y| > \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon.$
3. En déduire que $\delta(A) = \sup(A) - \inf(A)$

Exercice 13.10 (★★★)

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction croissante. On veut montrer que f admet un point fixe.

1. Montrer que $\{x \in [a,b] \mid f(x) \geq x\}$ admet une borne supérieure s dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(s) \geq s$.
3. En déduire que $f(s) = s$.
4. Ce résultat est-il toujours valable lorsque f est décroissante ?

Parties denses

Exercice 13.11 (★★)

Montrer que $E = \{r^3, r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13.12 (Un critère de densité - ★★)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que :

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a,b) \in A^2,\ a < x < b$;

(ii) $\forall (a,b) \in A^2,\ \frac{a+b}{2} \in A$.

Prouver que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13.13 (★★★ - Morphismes de $\mathbb{R}$ - ✍)

Soit f un morphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une application non nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$.

1. Montrer que $f(1) = 1$, puis que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
2. En déduire que $f(r) = r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $f(x^2) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. En déduire que f est croissante.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n), à valeurs rationnelles, de limite x, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x \leq b_n$.
5. En déduire que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
