TD10

Applications, relations binaires

Généralités sur les applications

Exercice 10.1 (★)
Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$. Déterminer les ensembles suivants (on pourra pour cela tracer la courbe représentative de f) :

$$f(\mathbb{R}),\ f([0,\pi]),\ f([-\pi/2,\pi/2]),\ f^{-1}(\{0\}),\ f^{-1}(\{\sqrt{3}/2\}),\ f^{-1}([0,1])$$
$$f^{-1}(f(\{0\}),\ f(f^{-1}(\{0\})),\ f^{-1}(f([0,\pi/2])),\ f(f^{-1}([0,1])).$$

Exercice 10.2 (★★)
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2+z+1 \end{array}$.

1. Déterminer $f(\mathbb{C})$, $f\left(\mathbb{C}^*\right)$ et $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{C})$, $f^{-1}\left(\mathbb{C}^*\right)$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.

Exercice 10.3 (★★)
Soit $f : E \to F$. Prouver que :

(i) pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$ et pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

(ii) pour tout $A,\ A' \in \mathscr{P}(E)$, $f\left(A \cup A'\right) = f(A) \cup f\left(A'\right)$ et $f\left(A \cap A'\right) \subset f(A) \cap f\left(A'\right)$.

(iii) pour tout $B, B' \in \mathscr{P}(F)$, $f^{-1}\left(B \cup B'\right) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}\left(B'\right)$ et $f^{-1}\left(B \cap B'\right) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}\left(B'\right)$.

Injections, surjections, bijections

Exercice 10.4 (★)
Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

$f_1 : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$;

$f_2 : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$;

$f_3 : (x,y) \mapsto x - y^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$;

$f_4 : (x,y) \mapsto (x-y, -2x+2y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$;

$f_5 : (x,y,z) \mapsto (x+2y+z, y, -x-4y+z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$;

$f_6 : n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 10.5 (★)
Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

1. Calculer $g \circ f$ puis $f \circ g$.
2. f et g sont-elles bijectives ?

Exercice 10.6 (★★)
Soit $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{U}$. Considérons $f_a : z \mapsto \dfrac{z+a}{\bar{a}z+1}$.

1. Montrer que f_a est définie sur $\mathbb{U}$ et à valeurs dans $\mathbb{U}$.
2. Montrer que f_a est bijective de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$ et déterminer sa réciproque.

Exercice 10.7 (★★)

Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. On considère l'application $h : E \to F \times G$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad h(x) = (f(x), g(x)).$$

1. Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.
2. On suppose f et g surjectives, h est-elle surjective ?

Exercice 10.8 (★★)

Soit E un ensemble et f une application de E vers E.

1. Supposons que $f \circ f = f$. Montrer que si f est injective ou surjective, alors $f = \mathrm{id}_E$.
2. Supposons que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 10.9 (★★)

Étant données trois applications $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to E$, établir que :

(i) si deux applications $g \circ f, h \circ g, f \circ h$ sont bijectives, la troisième l'est aussi.

(ii) si deux des applications $f \circ g \circ h, g \circ h \circ f, h \circ g \circ f$ sont injectives (resp. surjectives) et la troisième est surjective (resp. injective), alors f, g, h sont bijectives.

Exercice 10.10 (★★)

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

1. On suppose que f injective. Montrer que pour tout $M, N \in \mathscr{P}(E)$, $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$.
2. Réciproquement, montrer que si pour tout $M, N \in \mathscr{P}(E)$, $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$, alors f est injective.

Exercice 10.11 (★★★)

Soit E et F deux ensembles, et f une application de E vers F.

1. Montrer que f est injective si, et seulement si, pour tout $A \subset E$, $A = f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que f est surjective si, et seulement si, pour tout $B \subset F$, $B = f(f^{-1}(B))$.

Exercice 10.12 (★★★)

Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F. On considère les applications :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(F) & \to & \mathscr{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B). \end{array} \right.$$

Montrer les équivalences :

(i) f injective $\Leftrightarrow \varphi$ injective $\Leftrightarrow \psi$ surjective ; | (ii) f surjective $\Leftrightarrow \varphi$ surjective $\Leftrightarrow \psi$ injective.

Exercice 10.13 (★★★)

Soient E et F deux ensembles. Montrer qu'il existe une application injective de E dans F si, et seulement si, il existe une application surjective de F dans E.

Exercice 10.14 (★★★)

Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective (resp. surjective, resp. bijective).

2. Dans le cas où f est bijective, déterminer son application réciproque.

Exercice 10.15 (★★★★)

Soit $f : E \to F$.

1. Montrer que pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.

2. Montrer que f est bijective si, et seulement si, pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Exercice 10.16 (★★★★ - Oral Polytechnique 2017)

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que $f + f \circ f + f \circ f \circ f = 3\mathrm{id}$.

Relations binaires

Exercice 10.17 (★)

Montrer que la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{C}$ par $z\mathscr{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ est une relation d'équivalence. Décrire géométriquement ses classes d'équivalence.

Exercice 10.18 (★★)

Sur $\mathbb{Z}$, on définit une relation binaire $\mathscr{R}$ par : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $a\mathscr{R}b \Leftrightarrow a^3 - b^3 = a - b$. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer la classe d'équivalence d'un élément $a \in \mathbb{Z}$.

Exercice 10.19 (★★)

Soit E un ensemble, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$.
On définit alors une relation $\sim$ sur $\mathscr{P}(E)$ par $X \sim Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(E)$.

2. Prouver que l'application ψ qui à un élément X de $\mathscr{P}(A)$ associe sa classe d'équivalence pour $\sim$ est une bijection de $\mathscr{P}(A)$ sur l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$.

Exercice 10.20 (★★★)

Soit E et F deux ensembles et f une application de E vers F. On définit la relation $\mathscr{R}$ sur E en posant :

$$x\mathscr{R}y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y).$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E. Décrire les classes d'équivalence de cette relation.

2. Notons $E/\mathscr{R}$ l'ensemble des classes d'équivalences pour la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ et considérons l'application :

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} E/\mathscr{R} & \to & F \\ \overline{x} & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

   (a) Montrer que l'application $\tilde{f}$ est bien définie, c'est-à-dire que l'image de $\overline{x}$ par $\tilde{f}$ ne dépend pas du représentant choisi dans la classe de $\overline{x}$.

   (b) Montrer que $\tilde{f}$ est une application injective.

Exercice 10.21 (★★★)

Soit E un ensemble non vide et soit $A \subset \mathscr{P}(E)$ une partition de E.
Montrer qu'il existe une unique relation d'équivalence $\sim$ sur E telle que A soit l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$.

Exercice 10.22 (★)

Sur $E = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, on définit une relation $\preceq$ par :

$$\forall\, (z, z') \in E^2, \quad z \preceq z' \ \Leftrightarrow\ (|z| < |z'|) \ \textbf{ou}\ (|z| = |z'| \ \textbf{et}\ \mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Re}\,(z'))\,.$$

Montrer que $(E, \preceq)$ est un ensemble totalement ordonné.

Exercice 10.23 (★★)

On définit une relation $\preceq$ sur $\mathbb{N}$ en posant $p \preceq q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\, q = p^n$. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?

Exercice 10.24 (★★)

On travaille dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité $|$. L'ensemble $\{2^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ possède-t-il un plus grand élément? un plus petit élément? une borne supérieure? une borne inférieure?

Exercice 10.25 (★★)

Soit E un ensemble possédant au moins deux éléments. On considère l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ muni de la relation d'ordre $\subset$.

1. Montrer que $\mathscr{P}(E)\backslash\{E\}$ ne possède pas de plus grand élément.

2. Montrer que l'ensemble des singletons de E ne possède pas de plus grand élément. Est-il majoré ou minoré ? Admet-il une borne supérieure ou une borne inférieure ?

Exercice 10.26 (★★★)

Soit E un ensemble ordonné tel que toute partie non vide de E possède un plus grand et un plus petit élément. Montrer que E est fini.
