DS6

Devoir surveillé du 12/04/2025

Durée : 3h30.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1 (Choix d'entiers non consécutifs)

Soient k et n deux entiers strictement positifs tels que $k \leq n$. L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre de façons de choisir k entiers dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$ sans en choisir deux consécutifs. Nous noterons ce nombre $F(n, k)$.

1. Démontrer la relation $F(n+2, k+1) = F(n, k) + F(n+1, k+1)$.

2. On s'intéresse ici à des valeurs particulières de k.

   (a) Calculer $F(n, 1)$ pour $n \geq 1$.

   (b) Calculer $F(m+1, 2) - F(m, 2)$ pour $m \geq 2$, et en déduire une expression de $F(n, 2)$ pour $n \geq 3$.

3. Montrer que pour tout $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $F(n, k) = \binom{n-k+1}{k}$.

Exercice 2 (Inégalités de convexité)

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on note $h_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ t & \longmapsto & t^\alpha \end{array}$. Étudier, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la convexité de h_α sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que la somme de deux fonctions concaves sur un même intervalle I est concave sur I.

3. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ concave. On note $f : \begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \end{array}$.

   (a) Prouver que pour tous $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \leq f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$:

   $$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \leq f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} y_k\right).$$

4. En appliquant le résultat de la question précédente à la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$, prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

5. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $\varphi_p : t \mapsto \left(t^{\frac{1}{p}} + 1\right)^p$.

   (a) En utilisant la formule du binôme, montrer que φ_p est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Que donne l'inégalité de la question 3 appliquée à φ_p ? En déduire l'inégalité de Minkowski : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p}.$$

Exercice 3 (Étude d'une fonction définie par une intégrale)

1. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t + \sin t > 0$.

Pour tout $x > 0$, on note $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t + \sin t}$.

2. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et déterminer sa dérivée.

3. **Étude de la limite de f en $+\infty$.**

   (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\left| f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right| \leq \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t(t + \sin t)}$.

   (b) Prouver qu'il existe un réel $m > 0$ tel que pour tout $t \geq m$, $t + \sin t \geq \frac{t}{2}$.

   (c) En déduire qu'il existe un réel ℓ que l'on déterminera tel que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

4. **Étude de f au voisinage de 0.**

   (a) Justifier qu'il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ et

$$\forall t > 0, \quad \frac{1}{t + \sin t} = \frac{a}{t} + \frac{\varepsilon(t)}{t}.$$

   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\ln(2)}{2}$.

   (c) On note $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f à $[0, +\infty[$. Justifier que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4 (Commutant d'une matrice, polynômes en une matrice)

Partie 1 : questions préliminaires

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On pose :

$$\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$$

appelé *le commutant de la matrice A*.

1. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d.$$

On note alors $\mathbb{R}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}[X]\}$.

2. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et que $\mathbb{R}[A] \subset \mathscr{C}(A)$.
3. Déterminer $\mathscr{C}(I_n)$ et $\mathbb{R}[I_n]$. Quelle est la dimension de ces sous-espaces vectoriels ?

Partie 2 : polynôme minimal d'une matrice

Soient toujours $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est *annulateur de* A si $P(A) = 0_n$. On note $\mathscr{A}(A)$ l'ensemble des polynômes annulateurs de A.

4. On suppose **dans cette question seulement** que $n = 2$, et on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $P = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$ est annulateur de A.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k appartient à $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.
   (c) En déduire que $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_2, A)$, puis $\dim(\mathbb{R}[A])$.
5. On étudie à présent le cas général d'une matrice carrée A de taille $n \geq 1$.
   (a) En considérant la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n^2})$, montrer que $\mathscr{A}(A)$ n'est pas réduit au polynôme nul.
   (b) En déduire que $\{\deg(P),\ P \in \mathscr{A}(A) \setminus \{0_{\mathbb{R}[X]}\}\}$ admet un plus petit élément $d \in \mathbb{N}$.
   (c) Soit $K \in \mathscr{A}(A)$ de degré d. En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que K divise tout polynôme de $\mathscr{A}(A)$.
   (d) En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré d annulateur de A.

   On appelle ce polynôme le *polynôme minimal de* A et on le note π_A.
6. On souhaite montrer que $\dim(\mathbb{R}[A]) = d$.
   (a) En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$.
   (b) Montrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$ est libre. Conclure.

Partie 3 : commutant d'une matrice diagonale à coefficients diagonaux 2 à 2 distincts

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels strictement positifs et deux à deux distincts. Considérons :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

7. **Étude de $\mathscr{C}(D)$.**

   (a) Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $M \times D$ et $D \times M$.

   (b) En déduire que M appartient à $\mathscr{C}(D)$ si, et seulement si, M est une matrice diagonale.

   (c) Déterminer $\dim(\mathscr{C}(D))$.

8. **Étude de $\mathbb{R}[D]$.**

   (a) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

   (b) En déduire que si P est un polynôme annulateur non nul de D, alors $\deg(P) \geq n$.

   (c) Déterminer le polynôme minimal π_D de D. En déduire que $\mathbb{R}[D] = \mathscr{C}(D)$.

   (d) Retrouver l'égalité $\mathbb{R}[D] = \mathscr{C}(D)$ à l'aide des polynômes interpolateurs de Lagrange.

9. **Étude de $\mathscr{R} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2 = D\}$.**

   (a) Soit $M \in \mathscr{R}$. Montrer que M appartient à $\mathscr{C}(D)$. En déduire qu'il existe $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

   (b) Montrer que $\mathscr{R}$ est de cardinal 2^n, et déterminer les 2^n matrices M vérifiant $M^2 = D$.

Partie 4 : commutant des matrices de taille 2×2

10. Déterminer $\max\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.

11. Déterminer $\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.