DS6

Correction du devoir surveillé

Exercice 1 (Choix d'entiers non consécutifs)

1. Soit $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On définit trois entiers :

   - on note N le nombre de façons de choisir $k+1$ entiers dans l'ensemble $[\![1,n+2]\!]$ sans en choisir deux consécutifs.
   - on note N_1 le nombre de façons de choisir $k+1$ entiers dans l'ensemble $[\![1,n+2]\!]$ en choisissant l'entier 1 , ici aussi sans choisir deux entiers consécutifs.
   - on note N' le nombre de façons de choisir $k+1$ entiers dans l'ensemble $[\![1,n+2]\!]$ sans choisir l'entier 1, là encore sans choisir deux entiers consécutifs.

   Alors $N = N_1 + N'$ par disjonction exclusive. Calculons chacun de ces entiers :

   - Par définition, $N = F(n+2,k+1)$.
   - Pour obtenir un des choix de N_1, on choisit l'entier 1, puis on ne choisit pas l'entier 2 (pour la non-consécutivité), puis on en choisit k parmi $[\![3,n+2]\!]$ sans en choisir deux consécutifs. Il y a autant de façons de choisir k entiers non consécutifs parmi $[\![1,n]\!]$ que parmi $[\![3,n+2]\!]$. On en déduit que $N_1 = F(n,k)$.
   - Pour obtenir un des choix de N', on ne choisit pas l'entier 1, puis on choisit $k+1$ entiers parmi les $[\![2,n+2]\!]$ sans que deux ne soient consécutifs. En raisonnant comme précédemment, on montre que $N' = F(n+1,k+1)$.

   Ainsi, $\boxed{F(n+2,k+1) = F(n,k) + F(n+1,k+1) \text{ pour tout } (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2.}$

2. (a) Le nombre $F(n,1)$ est le nombre de façons de choisir un entier dans l'ensemble $[\![1,n]\!]$. En effet, la contrainte de non-consécutivité n'a pas d'importance ici puisqu'on ne choisit qu'un seul entier. Nous avons donc $\boxed{F(n,1) = n.}$

   (b) Appliquons la relation trouvée précédemment avec $k=1$, pour $m \geq 1$:

   $$F(m+2,2) = F(m,1) + F(m+1,2)$$

   Pour $m \geq 2$, nous pouvons appliquer cette formule avec $m-1$ à la place de m. On en déduit que

   $$\boxed{F(m+1,2) - F(m,2) = F(m-1,1) = m-1.}$$

   Soit $n \geq 3$. D'après l'égalité précédente, nous obtenons :

   $$\begin{aligned} F(n,2) - F(2,2) &= \sum_{m=2}^{n-1} (F(m+1,2) - F(m,2)) = \sum_{m=2}^{n-1} (m-1) \\ &= \sum_{m=1}^{n-2} m = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \end{aligned}$$

   Or nous avons $F(2,2) = 0$, d'où l'on déduit que

   $$\boxed{F(n,2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}.}$$

3. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ F(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$ ».

   $\boxed{\mathbf{I}}$ $\mathscr{P}(1)$ est vraie puisque $F(1,1) = 1 = \binom{1}{1}$.
   De même, $F(2,1) = 2 = \binom{2}{1}$ et $F(2,k) = 0 = \binom{n-k+1}{k}$ pour tout $k \geq 2$ (car $k > n-k+1$). Donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies.

Pour $k=1$, $F(n+2,1) = n+2 = \binom{n+2-1+1}{1}$ et l'égalité est bien satisfaite.

Pour $k \geq 2$, calculons à l'aide de la formule établie à la première question :

$$\begin{aligned} F(n+2,k) = F(n,k-1) + F(n+1,k) &= \binom{n-(k-1)+1}{k-1} + \binom{n+1-k+1}{k} \\ &= \binom{n-k+2}{k-1} + \binom{n-k+2}{k} = \binom{n-k+3}{k} \end{aligned}$$

d'après la relation du triangle de Pascal. D'où la propriété $\mathscr{P}(n+2)$ vraie.

D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. Autrement dit, pour tout $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\boxed{F(n,k) = \binom{n-k+1}{k}.}$$

Exercice 2 (Inégalités de convexité)

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $h_\alpha : t \mapsto t^\alpha = e^{\alpha \ln(t)}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de telles fonctions, et pour tout $t > 0$:

$$h_\alpha''(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$$

qui est du signe de $\alpha - 1$.

Ainsi $\boxed{h_\alpha \text{ est convexe (resp. concave) sur } \mathbb{R}_+^* \text{ si, et seulement si, } \alpha \geq 1 \text{ (resp. } \alpha \leq 1).}$

2. Soient f, g deux fonctions concaves sur I. Soient $a, b \in I$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors :

$$\begin{aligned} (f+g)((1-\lambda)a+\lambda b) &= f((1-\lambda)a+\lambda b) + g((1-\lambda)a+\lambda b) \\ &\geq (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)+(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b) \geq (1-\lambda)(f+g)(a)+\lambda(f+g)(b). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f+g \text{ est encore concave sur } I.}$

3. (a) Soient $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2) = y_1\varphi\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + y_2\varphi\left(\frac{x_2}{y_2}\right).$$

Et par ailleurs, $f(x_1+x_2, y_1+y_2) = (y_1+y_2)\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)$. Posons $\lambda = \frac{y_2}{y_1+y_2} \in [0,1]$, de sorte que $1-\lambda = \frac{y_1}{y_1+y_2}$. Alors :

$$\varphi\left((1-\lambda)\frac{x_1}{y_1} + \lambda\frac{x_2}{y_2}\right) = \varphi\left(\frac{x_1}{y_1+y_2} + \frac{x_2}{y_1+y_2}\right) = \frac{1}{y_1+y_2}f(x_1+x_2, y_1+y_2).$$

Par concavité de φ :

$$\varphi\left(\frac{x_1}{y_1+y_2} + \frac{x_2}{y_1+y_2}\right) \geq \frac{y_1}{y_1+y_2}\varphi\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \frac{y_2}{y_1+y_2}\varphi\left(\frac{x_2}{y_2}\right).$$

Et donc après multiplication par y_1+y_2, $f(x_1+x_2, y_1+y_2) \geq y_1\varphi\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + y_2\varphi\left(\frac{x_2}{y_2}\right)$, soit encore

$$\boxed{f(x_1+x_2, y_1+y_2) \geq f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2).}$$

(b) C'est une simple récurrence.

4. La fonction $t \mapsto \sqrt{t} = h_{1/2}(t)$ est concave d'après la question 1. Donc par ce qui précède, pour $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+^*$, il vient

$$\sum_{k=1}^n y_k \sqrt{\frac{x_k}{y_k}} \leq \left(\sum_{k=1}^n y_k\right) \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\sum_{k=1}^n y_k}} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k y_k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k}$$

En particulier, si $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des réels strictement positifs, alors en posant $x_k = a_k^2$ et $y_k = b_k^2$, il vient

$$\boxed{\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.}$$

5. (a) On a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*, \varphi_p(t) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} t^{\frac{k}{p}} = 1 + \sum_{k=1}^p h_{\frac{k}{p}}(t)$. Pour $k \in [\![1, p]\!], h_{\frac{k}{p}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $\frac{k}{p} \leq 1$. Et donc il en est de même[1] de $\binom{p}{k} h_{\frac{k}{p}}$. Par ailleurs, la fonction constante égale à 1 est concave.
Et alors par la question 2, $\boxed{\varphi_p \text{ est encore concave.}}$

(b) L'inégalité de la question 3 nous donne alors pour tous $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sum_{k=1}^n y_k \left(\left(\frac{x_k}{y^k}\right)^{1/p} + 1\right)^p \leq \sum_{k=1}^n y_k \left(\left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\sum_{k=1}^n y_k}\right)^{1/p} + 1\right)^p.$$

Soit encore

$$\sum_{k=1}^n \left(x_k^{1/p} + y_k^{1/p}\right)^p \leq \left(\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n y_k\right)^{1/p}\right)^p.$$

Pour $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$, appliquons cette inégalité à $x_k = a_k^p$ et $y_k = b_k^p$. On a alors

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \leq \left(\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/p}\right)^p$$

Reste à prendre la racine $p^{\text{ème}}$ des deux membres pour obtenir l'inégalité annoncée (en notant que $x \mapsto x^{1/p}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/p}}$$

Exercice 3 (Étude d'une fonction définie par une intégrale)

1. Procédons par disjonction de cas :

- Il est évident que si $x > 1$, $-\sin(x) \leq 1 < x$, et donc $x + \sin(x) > 0$.
- Sur $]0, 1]$, la fonction $g : x \mapsto x + \sin(x)$ est dérivable, avec $g' : x \mapsto 1 + \cos(x) > 0$. Donc g est strictement croissante, et puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$, pour tout $x \in]0, 1]$, $x + \sin(x) = g(x) > 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ x + \sin(x) > 0.}$

[1] Multiplier une fonction par un réel positif ne change pas sa convexité.

2. Puisque $t \mapsto \dfrac{1}{t+\sin t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, car inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas, la fonction[2] $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t+\sin(t)}$ est $\mathscr{C}^1$, avec $F' : x \mapsto \frac{1}{x+\sin(x)}$. Puisque de plus F' est $\mathscr{C}^\infty$ (car quotient de fonctions qui le sont), F est également $\mathscr{C}^\infty$. Mais alors pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sin t} + \int_1^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sin t} = \int_1^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sin t} - \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sin t} = F(2x) - F(x)$$

Donc par composition et somme de fonctions $\mathscr{C}^\infty$, f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Et alors, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \boxed{\frac{2}{2x+\sin(2x)} - \frac{1}{x+\sin(x)}.}$$

3. **Étude de la limite de f en $+\infty$.**

   (a) Soit $x > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right| &= \left|\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t+\sin(t)} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t(t+\sin t)} \mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_x^{2x} \left|\frac{\sin t}{t(t+\sin t)}\right| \mathrm{d}t \\ &\boxed{\leq \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+\sin t)}.}\end{aligned}$$

   (b) Puisque pour tout $t > 0$, $\dfrac{t}{2} + \sin(t) \geq \dfrac{t}{2} - 1$, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{2} + \sin(t) = +\infty$. Et donc en particulier, il existe $m > 0$ tel que pour tout $t > m$, $\frac{t}{2} + \sin(t) > 0$, et donc

$$\boxed{t + \sin(t) \geq \frac{t}{2}.}$$

   (c) Ainsi pour $x > m$, et pour tout $t \in [x, 2x]$, $t > m$, de sorte que $t + \sin(t) \geq \dfrac{t}{2}$, et donc $\dfrac{1}{t+\sin(t)} \leq \dfrac{2}{t}$.

   Par conséquent, $\dfrac{1}{t(t+\sin t)} \leq \dfrac{2}{t^2}$, si bien que par croissance de l'intégrale :

$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+\sin t)} \leq \int_x^{2x} \frac{2}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \left[-\frac{2}{t}\right]_x^{2x} \leq \frac{2}{x} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

   On en déduit donc par le théorème d'encadrement que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) = 0.$$

   Mais par ailleurs, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln(t)]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$. Et donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).}$

[2] Le théorème fondamental de l'analyse nous laisse le choix dans la constante que l'on prend comme borne du bas de l'intégrale. La plupart du temps on choisit 0, ce n'est pas un bon choix ici puisque $t \mapsto \frac{1}{t+\sin(t)}$ n'est pas définie en 0. Nous avons choisi 1, mais n'importe quel autre réel strictement positif aurait fait l'affaire.

4. **Étude de f au voisinage de 0.**

   (a) Si de tels a et ε existent, on doit avoir pour tout $t > 0$, $\frac{t}{t+\sin t} = a + \varepsilon(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Mais puisque $t+\sin(t) \underset{t\to 0}{=} t+t+o(t) \underset{t\to 0}{\sim} 2t$, on a $\dfrac{t}{t+\sin t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{2t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$. Donc si on pose $a = \frac{1}{2}$, et pour tout $t > 0, \varepsilon(t) = \dfrac{t}{t+\sin(t)} - \dfrac{1}{2}$, on a bien $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$, et pour tout $t > 0$,

$$\boxed{\frac{1}{t+\sin(t)} = \frac{1}{2t} + \frac{\varepsilon(t)}{t}}$$

   (b) Notons que par construction, la fonction ε de la question précédente est continue sur $]0, +\infty[$ par opérations usuelles sur des fonctions qui le sont. Ceci nous autorise donc à prendre son intégrale sur un segment.

   Pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{2t} + \int_x^{2x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(2)}{2} + \int_x^{2x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

   Soit $\varepsilon_0 > 0$. Puisque $\varepsilon(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \eta]$, $|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon_0$. Et donc

$$\left|\int_x^{2x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^{2x} \frac{|\varepsilon(t)|}{t}\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} \frac{\varepsilon_0}{t}\,\mathrm{d}t$$

   Si on note de plus que pour tout $t \in [x, 2x]$, $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{x}$, il vient

$$\left|f(x) - \frac{\ln(2)}{2}\right| = \left|\int_x^{2x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^{2x} \frac{\varepsilon_0}{x}\,\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon_0}{x}(2x - x) \leq \varepsilon_0.$$

   Ainsi, nous avons prouvé que pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \eta]$,

$$\left|f(x) - \frac{\ln(2)}{2}\right| \leq \varepsilon_0.$$

   C'est la définition de $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{\ln(2)}{2}.}$

   (c) Notons que l'existence de ce prolongement par continuité vient d'être justifiée par la question précédente. On a alors, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \frac{2}{2x+\sin(2x)} - \frac{1}{x+\sin(x)} = \frac{2x+2\sin(x)-2x-\sin(2x)}{(x+\sin(x))(2x+\sin(2x))} = \frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{(x+\sin(x))(2x+\sin(2x))}.$$

   Au dénominateur, $x+\sin(x) \underset{x\to 0}{=} 2x + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$, et donc $2x+\sin(2x) \underset{x\to 0}{\sim} 4x$. Au numérateur :

$$2\sin(x) - \sin(2x) \underset{x\to 0}{=} 2x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) - 2x + \frac{(2x)^3}{6} + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\sim} x^3.$$

   Donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{8x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{8} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, f' possède une limite finie en 0.

   Puisque par ailleurs f est déjà $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, $\boxed{\text{son prolongement par continuité à } [0, +\infty[\text{ est de classe } \mathscr{C}^1.}$

Exercice 4 (Commutant d'une matrice, polynômes en une matrice)

Partie 1 : questions préliminaires

1. Montrons que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   - La matrice nulle $M = 0_n$ appartient bien à $\mathscr{C}(A)$ puisque $M \times A = 0_n = A \times M$.
   - Soient $M, N \in \mathscr{C}(A)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda M + \mu N$ appartient à $\mathscr{C}(A)$:

   $$\begin{aligned} A \times (\lambda M + \mu N) &= \lambda A \times M + \mu A \times N \\ &= \lambda M \times A + \mu N \times A \qquad \text{car } M, N \in \mathscr{C}(A) \\ &= (\lambda M + \mu N) \times A. \end{aligned}$$

   Ainsi $\lambda M + \mu N$ appartient bien à $\mathscr{C}(A)$.

   $\boxed{\mathscr{C}(A) \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

2. Montrons que $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   - Pour $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$, $P(A) = 0_n$, de sorte que la matrice nulle appartient bien à $\mathbb{R}[A]$.
   - Soient $M, N \in \mathbb{R}[A]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda M + \mu N$ appartient à $\mathbb{R}[A]$.
   Puisque $M, N \in \mathbb{R}[A]$, il existe $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $M = P(A)$ et $N = Q(A)$. Dès lors :

   $$\lambda M + \mu N = \lambda P(A) + \mu Q(A) = (\lambda P + \mu Q)(A) = R(A)$$

   où $R = \lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}[x]$. Ainsi, $\lambda M + \mu N$ appartient bien à $\mathbb{R}[A]$.

   $\boxed{\mathbb{R}[A] \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

   Montrons à présent que $\mathbb{R}[A] \subset \mathscr{C}(A)$. Soit pour cela $M \in \mathbb{R}[A]$. Par définition, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = P(A)$. Notons $P = a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. Alors :

   $$\begin{aligned} A \times M = A \times P(A) &= A \times \left(a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n \right) \\ &= a_k A^{k+1} + a_{k-1} A^k + \cdots + a_1 A^2 + a_0 A \\ &= \left(a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n \right) \times A \\ &= P(A) \times A = M \times A. \end{aligned}$$

   Ainsi $M \in \mathscr{C}(A)$, et $\boxed{\mathbb{R}[A] \text{ est inclus dans } \mathscr{C}(A)}$

3. Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

   $$I_n \times M = M = M \times I_n.$$

   Ainsi M appartient à $\mathscr{C}(I_n)$. D'où l'inclusion $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}(I_n)$ et donc l'égalité $\boxed{\mathscr{C}(I_n) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
   En particulier, $\boxed{\mathscr{C}(I_n) \text{ est de dimension } n^2.}$

   Soit $M \in \mathbb{R}[I_n]$. Par définition, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, qu'on écrit $P = a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, tel que :

   $$M = P(I_n) = a_k I_n^k + a_{k-1} I_n^{k-1} + \cdots + a_1 I_n + a_0 I_n = (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) I_n.$$

   On remarque que M appartient à $\mathrm{Vect}(I_n)$. Ainsi $\mathbb{R}[I_n] \subset \mathrm{Vect}(I_n)$.

   Réciproquement, $I_n = P(I_n)$ pour $P = x$, et appartient donc à $\mathbb{R}[I_n]$. Puisque $\mathbb{R}[I_n]$ est un sous-espace vectoriel, on en déduit l'inclusion $\mathrm{Vect}(I_n) \subset \mathbb{R}[I_n]$.

   Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}[I_n] = \mathrm{Vect}(I_n)}$. Or (I_n) est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(I_n)$, et libre car constituée d'un vecteur non nul. C'est donc une base de cet espace. On en déduit que :

   $$\boxed{\dim(\mathbb{R}[I_n]) = \dim(\mathrm{Vect}(I_n)) = 1.}$$

Partie 2 : polynôme minimal d'une matrice

4. (a) Calculons $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$, puis :

$$(a+d)A - (ad-bc)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} - (ad-bc)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2 = 0_2$, et $\boxed{P = X^2-(a+d)X+(ad-bc) \text{ est annulateur de } A.}$

(b) Procédons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{I}}$ Puisque $A^0 = I_2 \in \mathrm{Vect}(I_2, A)$, la propriété est vraie au rang $k=0$.

$\boxed{\textbf{H}}$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que A^k appartient à $\mathrm{Vect}(I_2, A)$: il existe α_k, $\beta_k \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A^k = \alpha_k A + \beta_k I_2.$$

En multipliant par A (à gauche) :

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= \alpha_k A^2 + \beta_k A = \alpha_k \left((a+d)A - (ad-bc)I_2\right) + \beta_k A \\ &= \left(\alpha_k(a+d)+\beta_k\right)A - \alpha_k(ad-bc)I_2 \in \mathrm{Vect}(I_2, A). \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $k+1$.

Par principe de récurrence, A^k appartient à $\mathrm{Vect}(I_n, A)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(c) Montrons que $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_2, A)$.

- Pour $P = X$ et $Q = 1$, $A = P(A)$ et $I_2 = Q(A)$ appartiennent à $\mathbb{R}[A]$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. Donc $\mathrm{Vect}(I_2, A)$ est inclus dans $\mathbb{R}[A]$.
- Réciproquement, pour tout $M \in \mathbb{R}[A]$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, qu'on note $P = a_kX^k + \cdots + a_1X + a_0$, tel que :

$$M = P(A) = a_kA^k + \cdots + a_1A + a_0I_2.$$

Par la question précédente, tous les éléments de cette somme sont dans $\mathrm{Vect}(I_2, A)$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donc M appartient à $\mathrm{Vect}(I_2, A)$, et $\mathbb{R}[A] \subset \mathrm{Vect}(I_2, A)$.

Ainsi, $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_2, A)$ et (I_2, A) est une famille génératrice de $\mathbb{R}[A]$.

On a alors deux cas :

- si la famille (I_2, A) est liée, ce qui équivaut à l'existence d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$, alors :

$$\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_2, A) = \mathrm{Vect}(I_2).$$

La famille (I_2) est génératrice de $\mathbb{R}[A]$, et libre car constituée d'**un** vecteur non nul. C'est donc une base de $\mathbb{R}[A]$, et dans ce cas, $\boxed{\dim(\mathbb{R}[A]) = 1.}$

- si (I_2, A) est libre, puisqu'elle est aussi génératrice de $\mathbb{R}[A]$, c'est une base de $\mathbb{R}[A]$ et $\boxed{\dim(\mathbb{R}[A]) = 2}$ dans ce cas.

5. (a) La famille $(I_n, A, \ldots, A^{n^2})$ étant de cardinal n^2+1 dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension n^2, elle est liée : il existe $a_0, \ldots, a_{n^2}$ des réels non tous nuls tels que :

$$0_n = a_0I_n + a_1A + \cdots + a_{n^2}A^{n^2} = P(A)$$

en posant $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n^2}X^{n^2}$. Ainsi P appartient à $\mathscr{A}(A)$ et est non nul puisque les réels $a_0, \ldots, a_{n^2}$ sont non tous nuls : $\boxed{\mathscr{A}(A) \text{ n'est pas réduit au polynôme nul.}}$

(b) L'ensemble $\{\deg(P),\ P \in \mathscr{A}(A) \setminus \{0_{\mathbb{R}[X]}\}\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide par la question précédente. $\boxed{\text{Il admet donc un plus petit élément } d \in \mathbb{N}.}$

(c) Soit $K \in \mathscr{A}(A)$ de degré d. Considérons P un polynôme annulateur de A. Par théorème de division euclidienne, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$P = KQ + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(K) = d.$$

Mais :

$$0_n = P(A) = (K \times Q)(A) + R(A) = \underbrace{K(A)}_{=0_n} \times Q(A) + R(A) = R(A).$$

Ainsi, R est annulateur de A, de degré $< d$. Par minimalité de d, R est nécessairement le polynôme nul. D'où $P = KQ$ et K divise P : $\boxed{K \text{ divise tout polynôme de } \mathscr{A}(A).}$

(d) Justifions l'existence : par définition de d, il existe K annulateur de A de degré $d \geq 0$. Si on note α son coefficient dominant, nécessairement différent de 0 puisque K est non nul, alors $\frac{1}{\alpha}K$ est unitaire, de degré d et toujours annulateur de A. D'où l'existence d'un tel polynôme.

Soient à présent K_1 et K_2 deux polynômes unitaires de degré d annulateurs de A. Par la question précédente, K_1 divise K_2 et K_2 divise K_1. Les polynômes K_1 et K_2 sont donc associés, et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$K_1 = \lambda K_2.$$

Par identification des coefficients dominants dans cette égalité, il vient $1 = \lambda$, et donc $K_1 = K_2$.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe un unique polynôme unitaire de degré } d \text{ annulateur de } A.}$

6. (a) Montrons $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$ par double inclusion.

- Pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$ et pour $P_k = X^k$, $A^k = P_k(A)$ appartient à $\mathbb{R}[A]$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathrm{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{d-1}) \subset \mathbb{R}[A]$.
- Réciproquement, soit $M \in \mathbb{R}[A]$, et notons $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = P(A)$. Effectuons la division euclidienne de P par π_A : il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$P = \pi_A \times Q + R \text{ avec } \deg(R) < d.$$

D'où :

$$M = P(A) = \underbrace{\pi_A(A)}_{=0_n} \times Q(A) + R(A) = R(A) \in \mathrm{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$$

car $\deg(R) < d$.

Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{d-1}).}$

(b) Soit $(a_0, \ldots, a_{d_1}) \in \mathbb{R}^d$ tel que :

$$a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{d-1} A^{d-1} = 0_n.$$

Le polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{d-1} X^{d-1}$ est annulateur de A, de degré strictement plus petit que d. Par minimalité de d, P est donc le polynôme nul, soit $a_0 = \cdots = a_{d-1} = 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (I_n, A, \ldots, A^{d-1}) \text{ est libre.}}$

La famille $(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}[A]$ par ce qu'on vient de faire. C'est donc une base de $\mathbb{R}[A]$, et $\boxed{\dim(\mathbb{R}[A]) = d.}$

Partie 3 : commutant d'une matrice diagonale à coefficients diagonaux 2 à 2 distincts

7. (a) Pour $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, calculons :

$$\boxed{M \times D = \begin{pmatrix} m_{1,1}\lambda_1 & m_{1,2}\lambda_2 & \dots & m_{1,n}\lambda_n \\ m_{2,1}\lambda_1 & m_{2,2}\lambda_2 & \ddots & m_{2,n}\lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1}\lambda_1 & m_{n,2}\lambda_2 & \dots & m_{n,n}\lambda_n \end{pmatrix}, \quad D \times M = \begin{pmatrix} m_{1,1}\lambda_1 & m_{1,2}\lambda_1 & \dots & m_{1,n}\lambda_1 \\ m_{2,1}\lambda_2 & m_{2,2}\lambda_2 & \ddots & m_{2,n}\lambda_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1}\lambda_n & m_{n,2}\lambda_n & \dots & m_{n,n}\lambda_n \end{pmatrix}.}$$

(b) M appartient à $\mathscr{C}(D)$ si, et seulement si, $M \times D = D \times M$, ce qui équivaut à (avec le calcul effectué à la question précédente) :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ i \neq j,\ m_{i,j}\lambda_j = m_{i,j}\lambda_i$$

Et comme les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont supposés deux à deux distincts, ceci est encore équivalent à :

$$m_{i,j} = 0 \ \text{ pour tout } \ i \neq j.$$

Ainsi, $\boxed{M \text{ appartient à } \mathscr{C}(D) \text{ si, et seulement si, } M \text{ est une matrice diagonale.}}$

(c) Par la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(D) &= \left\{ \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix},\ \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R} \right\} = \{\mu_1 E_{1,1} + \mu_2 E_{2,2} + \mu_n E_{n,n},\ \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}(E_{1,1}, \dots, E_{n,n}),\end{aligned}$$

où les $E_{i,j}$ désignent les matrices élémentaires qui constituent la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La famille $(E_{1,1}, \dots, E_{n,n})$ est donc génératrice de $\mathscr{C}(D)$, et libre en tant que sous-famille de la famille libre $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. C'est donc une base de $\mathscr{C}(D)$, ce qui permet de conclure que $\boxed{\dim(\mathscr{C}(D)) = n.}$

8. **Étude de $\mathbb{R}[D]$.**

(a) Soit $P = a_k X^k + \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Calculons :

$$\begin{aligned} P(D) &= a_k D^k + \dots + a_1 D + a_0 I_n \\ &= a_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} + \dots + a_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} + a_0 I_n \\ &= \begin{pmatrix} a_k\lambda_1^k + \dots + a_1\lambda_1 + a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_k\lambda_2^k + \dots + a_1\lambda_2 + a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_k\lambda_n^k + \dots + a_1\lambda_n + a_0 \end{pmatrix} \\ &\boxed{= \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

(b) Avec le calcul précédent :

$$P(D) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix} = 0_n$$
$$\Leftrightarrow P(\lambda_1) = \dots = P(\lambda_n) = 0.$$

En particulier, si P est un polynôme annulateur non nul de D, il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$, non nul puisque $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$, tel que :

$$P = (X - \lambda_1) \times \dots \times (X - \lambda_n) \times Q(X).$$

En prenant le degré, on obtient :

$$\boxed{\deg(P) = n + \deg(Q) \geq n.}$$

(c) Par la question précédente, le polynôme unitaire $P = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_n)$ est annulateur de D et de degré minimal parmi les polynômes annulateurs non nuls de D. Donc $\boxed{\pi_D = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_n).}$

On a montré que $\mathbb{R}[D] \subset \mathscr{C}(D)$ à la question 2, $\dim(\mathbb{R}[D]) = n$ avec les questions 6 et 8.(c), et $\dim(\mathscr{C}(D)) = n$ à la question 7.(c). Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}[D] = \mathscr{C}(D).}$

(d) On a déjà montré $\mathbb{R}[D] \subset \mathscr{C}(D)$ à la question 2. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $M \in \mathscr{C}(D)$ Par la question 7.(b), M est une matrice diagonale :

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

où $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$.

On a montré en cours (à l'aide des polynômes interpolateurs de Lagrange) l'existence (et l'unicité) d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(\lambda_i) = \mu_i$. Calculons alors :

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = M.$$

Ainsi, M appartient à $\mathscr{R}[D]$, et on retrouve bien $\boxed{\mathbb{R}[D] = \mathscr{C}(D).}$

9. **Étude de $\mathscr{R} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2 = D\}$.**

(a) Soit $M \in \mathscr{R}$. M satisfait donc $M^2 = D$. Calculons :

$$M \times D = M \times M^2 = M^2 \times M = D \times M.$$

Ainsi, $\boxed{M \text{ appartient à } \mathscr{C}(D).}$

Or, d'après la question 7.(b), le commutant de D est formé des matrice diagonales. Par conséquent, il existe $\mu_1, \dots, \mu_n$ des réels tels que :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.}$$

(b) Substituons dans l'équation $M^2 = D$:

$$\begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Par identification, on obtient $\mu_1^2 = \lambda_1, \dots, \mu_n^2 = \lambda_n$, soit $\mu_1 = \pm\sqrt{\lambda_1}, \dots, \mu_n = \pm\sqrt{\lambda_n}$.
Ainsi, si M appartient à $\mathscr{R}$, alors M est l'une des 2^n matrices :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

où pour tout $1 \leq i \leq n$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Réciproquement, toutes ces matrices sont clairement dans $\mathscr{R}$. Par conséquent :

$$\boxed{\mathscr{R} = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1\sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},\ \varepsilon_1, \dots \varepsilon_n \in \{-1, 1\} \right\}}$$

et $\boxed{\mathscr{R} \text{ est bien de cardinal } 2^n.}$

Partie 4 : commutant des matrices de taille 2×2

10. Pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4, donc $\dim(\mathscr{C}(A)) \leq 4$. Et on a vu à la question 3. que $\dim(\mathscr{C}(I_2)) = 4$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\max_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) = 4.}$$

11. Tout d'abord, pour $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on sait d'après la question 7.(c) que $\dim(\mathscr{C}(D)) = 2$. Il suit que $\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) \leq 2$.

    Supposons qu'il existe $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\dim(\mathscr{C}(A)) \leq 1$. Puisque $\mathbb{R}[A] \subset \mathscr{C}(A)$, $\dim(\mathbb{R}[A]) \leq 1$. Mais d'après la question 4.(c), $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_2, A)$. La famille (I_2, A) est donc liée, et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$. Mais alors, $\mathscr{C}(A) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ puisque λI_2 commute avec toutes les matrices, et donc $\dim(\mathscr{C}(A)) = 4 \not\leq 1$.

    Ainsi pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\dim(\mathscr{C}(A)) \geq 2$, d'où :

$$\min_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) \geq 2.$$

    Finalement, on a montré $\boxed{\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) = 2.}$
